

Deux problèmes dans la modélisation du comportement de déplacement

L. H. KLAASSEN et J. H. P. PAELINCK,
avec la collaboration de A. C. P. VERSTER

1 - INTRODUCTION.

Dès le début, l'analyse spatiale a intégré les phénomènes de transport et de déplacement, étant donné que ceux-ci étaient en général jugés être responsables des coûts de friction spatiale. Depuis THÜNEN, en passant par WEVER, LÖSCH, HOOVER (1948), ISARD (1956) et THISSE (1975) la tradition a été maintenue.

Cependant la formalisation de certains aspects de comportements modernes de déplacement, de transport ou de distribution peut encore être améliorée ; cet article développe deux aspects de ceux-ci, l'un par rapport au comportement des producteurs, l'autre par rapport à l'analyse du consommateur. Il complète, entre autres, certains développements présentés dans l'article de KLAASSEN, e.a. (1978).

2 - LE COMPORTEMENT DES PRODUCTEURS.

Traditionnellement on a utilisé des coûts de transport variables, soit proportionnels à la distance, soit exprimés comme fonctions-puissance de celle-ci (1).

(1) J. PAELINCK et P. NIJKAMP, (1975), Ch. 2 ; J. THISSE, (1975), pp. 58 et suiv.

Certains types récents de planning de la distribution révèlent que la puissance peut tomber à zéro. Ainsi, entre autres, EILON écrit (1) :

" One feature that most methods in the literature seem to ignore is the problem of journey planning. Most companies load each lorry with items to be delivered to several different customers in a single round trip. Hence the cost of one journey should be shared amongst many customers. In general both approaches assume that loads are delivered on a 'straight there and back' basis. Where cognizance of this problem has been taken in the literature, the methods used rely on simulation, in which a journey-planning algorithm can be incorporated, or on clustering customers into groups, The demand of each group being approximately one lorry load."

Et encore (2) :

" Customers are grouped into sub-areas in such a way that the aggregated demand of each sub-area is an integer number of lorry loads. The assumption is that the cost of making deliveries in any sub-area is constant and that it is only necessary to minimize the cost of travel to the sub-area. The search procedure used is to move each depot to each of the four corners of a square centred on the current depot location. The ... locations are costed and the cheapest location is then retained for each depot in turn. When no improvement is found, the size of the square is halved and the process is repeated. The programme is repeated for 1, 2, 3, ... depots and the cheapest solution is then selected. ... The *feasible set approach* has arisen from consideration of two factors which the infinite set approach has not, until just recently, attempted to cater for. The first has to do with the fact that, in general, transportation costs need to be proportional to distance and in particular to straightline distance ; the second is that operating costs of individual depots can vary considerably from town to town and even from location in the same town."

Une application est le modèle à coûts de camionnage dépendant du district (3), l'utilisation de "distances du voyageur de commerce" (4) et l'intégration de la technologie du transport ainsi qu'il apparaît de la citation suivante (5) :

$$H = \alpha \sum_k u_k D_k \quad (5.4)$$

" where u_k is the total requirements of all customers supplied by vehicle k , and D_k is the length of the tour k .

" Strictly, u_k is the amount that a vehicle carries at the beginning of the tour, but the actual load on the vehicle decreases along the route as consignments are delivered to customers, so

(1) S. EILON e.a., (1971), p. 5.

(2) Ibidem, p. 20.

(3) Ibidem, p. 73 et 100-101.

(4) Ibidem, p. 89.

(5) Ibidem, p. 97.

" that u_k is not carried for the whole distance D_k , but an allowance for this difference can generally be made by adjusting the value of α . In the special case where the delivery costs depend on the distance travelled and not on the amount carried, equation (5.4) reduces to $\alpha \sum_k D_k$.

Dans cet article, on étudiera seulement un nombre limité d'implications ; nous commencerons par passer en revue les distances moyennes (attendues) sur certaines figures géométriques.

2.1. - Distances attendues.

En général, les distances attendues à coût de transport unitaire constant et à densité de demande unitaire constante le long d'une droite ont été calculées suivant (1)

$$\bar{d} = \frac{\int_0^R \rho d\rho}{\int_0^R d\rho} = \frac{R}{2} \quad (2.1)$$

D'autre part, si nous considérons les transports "collectifs" à coût de transport constant, le coût moyen est évidemment égal au coût marginal, c'est-à-dire à l'unité.

Les difficultés commencent avec $R < 2$, lorsque la livraison "individuelle" serait moins coûteuse que le transport collectif ! Les formules correctes sont (1)

$$d(c) = \frac{\int_1^R d\rho}{\int_1^R \frac{1}{R} d\rho} = \frac{R-1}{R-1} = 1 \quad (2.2)$$

$$\bar{d}(i) = \frac{\int_1^R \rho d\rho}{\int_1^R d\rho} = \frac{1}{2} \frac{R^2-1}{R-1} = \frac{1}{2} (R+1) \quad (2.3)$$

Evidemment $\bar{d}(i) + \bar{d}(c)$ pour $R + 1$; en fait, l'artifice mathématique consiste à utiliser les limites d'intégration appropriées.

Ces commentaires s'appliquent aussi au cercle, pour lequel les coûts de transport individuels sont

(1) c représente des livraisons collectives, i des livraisons individuelles ; les distances attendues, étant donné les hypothèses, sont les coûts de transport attendus.

$$\bar{d}(i) = \frac{2\pi \int_1^R \rho(\rho-1) d\rho}{\int_1^R (\rho-1) d\rho} = 1/3 (2R + 1)$$

où la limite est également 1 lorsque $R \rightarrow 1$

Il est facile d'obtenir des généralisations ; la généralisation par rapport à une fonction - puissance sur une droite donne

$$\bar{d}(c) = \frac{\int_1^R \rho^\alpha d\rho}{\int_1^R d\rho} = (1 + \alpha)^{-1} \frac{R^{1+\alpha}-1}{R-1} \tag{2.5}$$

pour laquelle, à nouveau, par application de la règle de l'Hôpital, on peut démontrer la convergence vers 1 lorsque $R \rightarrow 1$; d'autres figures que la droite et le cercle peuvent être traitées, ainsi qu'il est exposé dans Paelinck-Nijkamp (1).

2.2 - Zones de transport.

Prenons le cas d'une firme F qui organise le transport de son produit en divisant une zone circulaire à densité de demande unitaire en segments, de manière à tenir compte de deux contraintes :

- la longueur maximale de parcours journalier d'un type donné de camion, d ;
- le volume de biens qui peut être chargé et distribué par un camion, v.

La figure 2.1. illustre la situation.

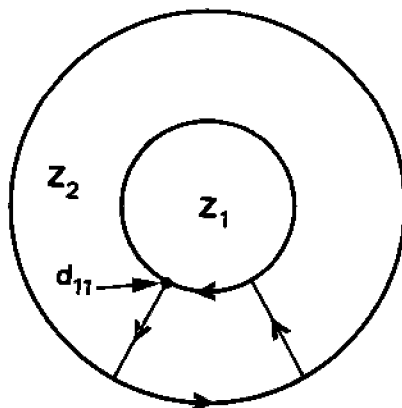


Figure 2.1.

Les consommateurs se trouvant à l'intérieur du segment s_1 sont supposés se rendre à certains points de distribution situés le long de l'itinéraire du camion.

(1) (1975), Ch. 2.

Le nombre de camions qu'il s'agit d'utiliser dans le programme peut être calculé suivant

$$2 r_1 (1 + \pi n_1^{-1}) = d \quad (2.6)$$

$$\pi r_1^2 n_1^{-1} = v \quad (2.7)$$

où les inconnues sont r_1 (le rayon du cercle) et n_1 , le nombre de camions ; toutefois, la solution ne garantit pas que l'on obtienne un n_1 entier et elle ne possède pas de propriétés "optimales".

Une seconde zone peut être desservie pour des dépôts ainsi qu'il est illustré dans la figure 2.2.

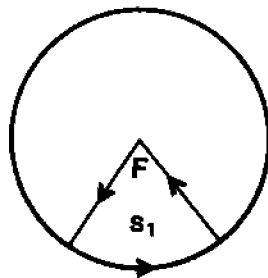


Figure 2.2.

Des dépôts, tels que d_{11} , peuvent évidemment être desservis par des camions sous la contrainte (2.6) ; la vérification de (2.7) est garantie, puisque pour des segments dans la zone Z_2 les équations suivantes se vérifient :

$$2 [(r_2 - r_1) + \pi (r_1 + r_2) n_2^{-1}] = d \quad (2.8)$$

$$\pi (r_2 + r_1) (r_2 - r_1) n_2^{-1} = v \quad (2.9)$$

dans lesquelles les inconnues sont r_2 , le rayon jusqu'à la limite de la zone 2, calculé à partir de F dans la figure 2.1, et n_2 , le nombre de camions (et de dépôts) nécessaires pour desservir la zone 2 (1).

Dans le cas de transport collectif, les prix dans la zone 2 doivent être supérieurs d'un facteur dû aux coûts additionnels de transport et de dépôt, ainsi qu'il apparaît de l'expression suivante :

(1) Il est possible qu'un nombre inférieur de dépôts soit "optimal" dans un certain sens ; un candidat évident est $n_2/2$.

$$c_{21} = 1 + \frac{2r_1 + \delta}{v} \quad (2.10)$$

où c_{21} est le coût relatif de transport collectif dans la zone 2 par rapport à la zone 1 ; δ est le coût de dépôt, et les coûts de transport sont unitaires.

Il est facile de trouver des exemples ; tel est le cas du prix de l'essence variable suivant les zones en Belgique.

2.3. - Implications pour l'équilibre spatial général.

Rappelons tout d'abord les cinq types d'équations d'équilibre de LÖSCH (1) :

$$\frac{\partial \pi_{ir}}{\partial x} = \frac{\partial \pi_{ir}}{\partial y} \quad \forall i, r \quad (2.11)$$

$$\pi_{ir} = 0 \quad \forall i, r \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \pi_{ir}}{\partial s_{ir}} = 0 \quad \forall i, r \quad (2.13)$$

$$\sum_r s_{ir} = s \quad \forall i \quad (2.14)$$

$$p_{ir}^* = p_{i\rho}^* \quad \forall i, r, \rho \quad (2.15)$$

Ici π représente les profits, x et y les coordonnées spatiales, s les surfaces, p^* les prix à la livraison. L'indice i représente les produits, les indices r et ρ les aires de marché au sens de Palander.

Les inconnues sont les coordonnées x et y , les prix-usine p , les surfaces, le nombre des aires de marchés, et les équations de frontière. Le problème est mixte entier-continu (le nombre d'aires de marché est entier !) ; si p_{ir}^* était discret, sa résolution ne s'en trouverait pas simplifiée.

BOS (2) a simplifié le problème en ignorant presque toutes ces inconnues ; il a introduit un concept spatial utile, notamment celui de "concentration ou dispersion" des activités, tandis que le raisonnement de LÖSCH est bâti à partir d'aires de marché séparables (3).

(1) Pour les détails, voir PAELINCK et NIJKAMP, (1975), Ch. 2.

(2) H. BOS, (1964).

(3) Voir aussi M. BECKMANN, (1971).

Si alors nous introduisons la possibilité de coûts de transport collectif, la proposition de BOS basée sur l'hypothèse que les coûts d'exportation sont proportionnels aux volumes exportés, et indépendants des distances, pourrait bien être la plus réaliste ; dans ce cas, on pourrait dériver une proposition dans laquelle seulement des centres intégrés sont observés (1).

Cette relation entre l'absence de coûts de transport et les tendances à la concentration pour exploiter des économies d'échelle et des économies externes, commence à être bien connue ; si on ajoute des effets d'information (2), la concentration dans l'espace pourrait bien résulter de modèles théoriques plus réalistes, qui devraient se vérifier dans des modèles économétriques spatiaux empiriques.

3 - LE COMPORTEMENT DES CONSOMMATEURS.

A titre d'exemple-type, nous désirons construire un modèle d'achat plus intégré, utilisant la théorie de l'utilité comme point de départ. Il convient de mentionner que l'idiosyncrasie vers la théorie de l'utilité est seulement dictée par le fait qu'elle a permis d'obtenir certains résultats utiles ; ceux-ci devraient être considérés comme complémentaires par rapport à ceux qui ont été dérivés à partir des mêmes points de départ ou à partir d'autres points de départ, par exemple, par BECKMANN, (1971), DOMENCICH et autres, (1975), ISARD, (1975) RICHARD et autres, (1975), et WILSON, (1970).

3.1. - Le problème.

Prenons comme point de départ la fonction de friction spatiale bien connue à coût de transport généralisé (3)

$$x_i = \alpha_i e^{-\beta c_i - \gamma t_i} \quad (3.1)$$

où x_i représente un nombre de kilomètres parcourus jusqu'à la destination i au cours de la période unitaire (x_i étant donc continue, en pratique) (4), c_i et t_i étant le coût par kilomètre jusqu'à la destination i , en termes monétaires et temporels.

(1) Voir la proposition P 3.5, reprise dans PAELINCK-NIJKAMP, (1975), p. 135. Nous abstrayons ici, de l'hypothèse générale de systèmes, la minimisation totale des coûts de transport.

(2) C. STHAL, (1974)

(3) Voir, par exemple, L. KLAASSEN, (1976).

(4) Ce problème de continuité est souvent rencontré dans ce type de modèle (voir, par exemple, C. STAHL, (1974), p. 59) ; il est évident que l'artifice indiqué ne garantit pas nécessairement que le nombre de parcours soit entier, puisque $x_i/d_i = n_i$ n'est pas nécessairement entier (d_i étant la distance par rapport au point i).

(3.1) peut être dérivée d'une fonction d'utilité sous contraintes du revenu r et du temps t , donnant l'expression lagrangienne suivante :

$$L = u(\underline{x}) - \beta(\underline{c}'\underline{x} - r) - \gamma(\underline{t}'\underline{x} - t) \quad (3.2)$$

d'où

$$u'_i = \beta c_i + \gamma t_i \quad (3.3)$$

$$= - \ln x_i + \ln \alpha_i \quad (3.4)$$

(3.1) étant dérivée de (3.4).

L'intégration de (3.4) par rapport à x_i donne la fonction d'utilité "intelog" totale (séparable)

$$u(\underline{x}) = \sum_i x_i (1 + \ln \alpha_i - \ln x_i) = - \int_1^{x_i} \log \xi \, d\xi \quad (3.5)$$

ou une transformation positive monotone de celle-ci ; \underline{x} est le vecteur de kilomètres parcourus jusqu'à l'ensemble des destinations ouvertes au consommateur.

La difficulté de (3.1) est qu'elle ne représente pas une fonction de demande classique, mais une sorte de fonction de demande intermédiaire, dans laquelle β et γ , les paramètres lagrangiens, sont toujours présents ; or il se fait que β et γ sont des fonctions de r (le revenu), de t (le temps d'achat disponible), et les vecteurs \underline{c} et \underline{t} . C'est pourquoi (3.1) ne peut servir que comme modèle *descriptif* pour un consommateur, et pas comme modèle *explicatif* pour n consommateurs ; et c'est aussi la raison pour laquelle nous avons critiqué l'approche de WILSON(1). Cela pourrait, peut-être, expliquer également la trajectoire exponentielle négative (3.1) lorsque le coût de déplacement est croissant, même si les fonctions de demande (3.1) étaient linéaires, par exemple, avec

$$x_i = \alpha_i - \beta c_i - \gamma t_i \quad (3.6)$$

dans le sens que, si par exemple, c_i croît, β et γ croissent aussi, la fonction tendant vers une relation non-linéaire (2).

Dans le cas du modèle (3.1), les valeurs de β et de γ sont des fonctions plutôt compliquées de r , t , \underline{c} et \underline{t} . A partir des contraintes déjà mentionnées

$$\underline{c}'\underline{x} = r \quad (3.7a)$$

$$\underline{t}'\underline{x} = t \quad (3.7b)$$

(1) Voir la recension critique de WILSON (1970) : J. PAELINCK, (1973).

(2) Pour le comportement de β et de γ comme fonction de leurs arguments, voir J. BLOKLAND et J. PAELINCK, (1972).

dans lesquelles on substitue (3.1), il peut être démontré, qu'après la linéarisation de la fonction exponentielle

$$\beta \approx \frac{\sum_i \alpha_i t_i^2 (\sum_i \alpha_i c_i - r) - \sum_i \alpha_i c_i t_i (\sum_i \alpha_i t_i - t)}{\sum_i \alpha_i c_i^2 \sum_i \alpha_i t_i^2 - (\sum_i \alpha_i c_i t_i)^2} \quad (3.8a)$$

$$\gamma \approx \frac{\sum_i \alpha_i c_i^2 (\sum_i \alpha_i t_i - t) - \sum_i \alpha_i c_i t_i (\sum_i \alpha_i c_i - r)}{\sum_i \alpha_i c_i^2 \sum_i \alpha_i t_i^2 - (\sum_i \alpha_i c_i t_i)^2} \quad (3.8b)$$

Rien n'est enlevé à la difficulté si on utilise une fonction de demande plus classique, par exemple une fonction addilog (1). En effet, en prenant la fonction d'utilité spécifique

$$u = \prod_i x_i^{\alpha_i}, \quad \sum_i \alpha_i = 1 \quad (3.9)$$

avec les contraintes (3.7), on obtient

$$x_i = \alpha_i \frac{r}{c_i} \frac{1 + \mu^* t^*}{1 + \mu^* t_i^*} \quad (3.10)$$

où $\mu^* = \mu/\gamma$, le rapport des utilités marginales du temps et du revenu,

$$t^* = t/r \text{ et } t_i^* \triangleq t_i/c_i.$$

La substitution de (3.10) dans (3.7) et l'expansion quadratique de TAYLOR permettent d'obtenir

$$\mu^* \approx \frac{\frac{t^*}{\alpha_i t_i^*} - 1}{2 \left(1 - \frac{\alpha_i t^*}{\alpha_i t} \right)} \quad (3.11)$$

ce qui prouve que les fonctions addilog, avec deux contraintes, ne produisent pas de fonctions de demande séparables simples, comme dans le cas où il n'y a qu'une contrainte.

On pourrait songer à construire (ou mieux, dériver) (3.1) suivant

$$x_i = \alpha_i e^{pr + \sigma t - \delta_i c_i - \epsilon_i t_i} \quad (3.12)$$

(1) Voir L. PHILIPS, (1974) et, pour un traitement proprement économique, G. ROTTIER, (1975).

une fonction qui serait conçue comme une vraie forme réduite (ρ, σ, δ_i et ϵ_i étant des paramètres fixes) d'un modèle de demande inspiré de la théorie de l'utilité.

3.2. - L'intégration des comportements de déplacement et d'achat.

Toutefois, le modèle (3.2) est très primitif quant à sa spécification. Nous allons examiner la construction suivante (voir figure 3.1) :

- (a) r centres d'achat d_1, \dots, d_r ("destinations") ;
par exemple : centres d'achat de voisinage, district commercial central, centre d'achat dans les "espaces verts".
- (b) Chaque centre, par exemple d_j , offre l'occasion d'acheter de manière répétitive un vecteur de biens \underline{q}_j aux prix \underline{p}_j ; \underline{q}_j pourrait être interprété comme étant les ventes moyennes par visite à un certain d_j .

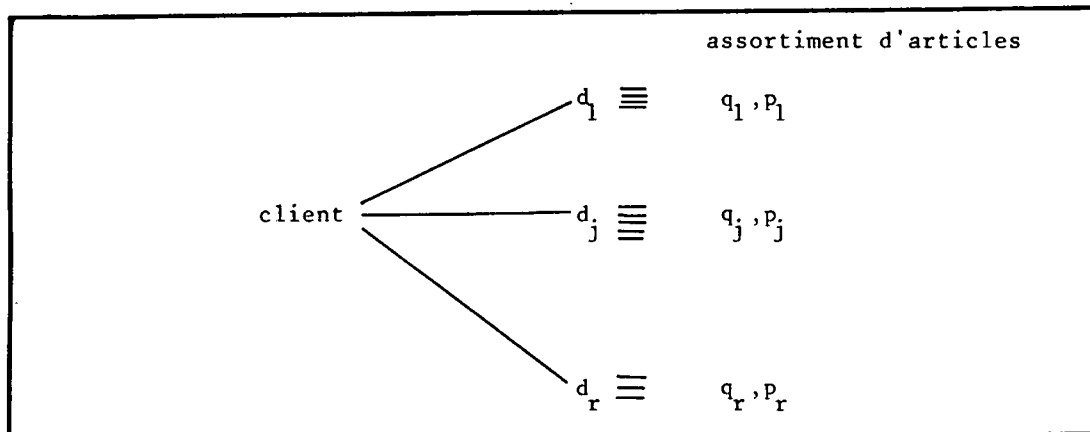


Figure 3.1.

$\underline{q}_j = n \times 1$ (nombre de biens) ; \underline{p}_j également, mais tous deux ont des valeurs nulles pour certains biens.

(c) Nous maximisons (1)

$$u(\underline{q}, \underline{n}) \tag{3.13}$$

où \underline{q} est le $n \times 1$ vecteur des achats totaux de tous les biens et services dans tous les centres au cours de toutes les visites, et \underline{n} le $r \times 1$ vecteur du nombre de visites aux centres d_1 à d_r (2).

(1) Le fait que \underline{n} est entier est ignoré ici.

(2) n_j peut se généraliser à n_{jk} , achats au centre j au moyen du moyen d'un transport de type k .

(d) contraintes

$$(d_1) \quad \underline{p}^* \hat{n} \underline{q}^* + \underline{c}' \underline{n} = r \quad (3.14)$$

$$\underline{p}^* \triangleq [p'_1, p'_2, \dots, p'_r]$$

$$\underline{q}^* \triangleq [q'_1, q'_2, \dots, q'_r]$$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & & & \\ & \hat{n}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \hat{n}_1 = \begin{bmatrix} n_1 & & & \\ & n_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

\underline{c} est le vecteur de coûts unitaires des déplacements \underline{n} , \hat{n} est d'ordre $[(n \times r) \times (n \times r)]$ et \hat{n}_1 est d'ordre $(n \times n)$.

$$(d_2) \quad J \hat{n} \underline{q}^* = \underline{q} \quad (3.15)$$

$$J = \begin{bmatrix} 100 & \cdot & \cdot & \cdot & 100 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 010 & \cdot & \cdot & \cdot & 010 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = n \times (n \times r)$$

$$(d_3) \quad \underline{t}' \underline{n} = t \quad (3.16)$$

\underline{t}' est le coût par unité de temps des visites des centres d_r .

Il faut noter que cette contrainte ne tient pas compte de la *périodicité* des visites d'achat. Le choix d'une fonction explicite (3.13) dépend de la réponse à la question posée à la section 3.1, in fine.

Le modèle d'achat hiérarchique peut être développé comme suit.

Du point de vue de la forme qui lui a été donnée ici, les conditions du premier ordre sont successivement par rapport à q_{ij} et n_j :

$$u'_i n_j = \lambda n_j p_{ij}, \quad \forall j \quad (3.17a)$$

$$u'_j + \sum_i u'_i q_{ij} = \lambda (\sum_i p_{ij} q_{ij} + c_j) + \mu t_j \quad (3.17b)$$

où u'_i , u'_j sont les dérivées partielles par rapport au bien i et au centre j respectivement. L'équation (3.17a) divisée par n_j donne lieu à une incohérence ; en fait, il faudrait lire

$$u'_i \leq p_{ij} \quad (3.18)$$

(condition de Kuhn-Tucker) (1) ; le modèle implique que les achats ne se font, par exemple, que là où le prix est le plus bas (puisque le consommateur est indifférent à l'origine du bien i ; cfr. la fonction d'utilité $u(q, n)$). Si nous indiquons l'optimum choisi q_{ij}^0 par le cercle de Pareto, il vient de (3.17a), combiné avec (3.17b) sous la forme de l'égalité $q_{ij} = q_{ij}^0$:

$$u_j^i = \lambda c_j + \mu t_j \tag{3.19}$$

et ceci est le modèle élémentaire de la section 3.1. Un fait empirique important n'a pas été révélé par ce modèle : l'assortiment de biens dans le comportement d'achat. De tels assortiments s'obtiennent, par exemple, par l'extension de la fonction d'utilité à

$$u(\underline{q}^*, \underline{n}) \tag{3.10}$$

signifiant que le consommateur obtient une satisfaction particulière à acheter le produit i dans un centre d'achat spécifique !

Les conditions du premier ordre sont maintenant :

$$u^i_{ij} = n_j p_{ij}, \quad \forall i, \quad \forall j \tag{3.21a}$$

$$u^i_j = \lambda (\sum_i p_{ij} q_{ij} + c_j) + \mu t_j \tag{3.21b}$$

d'où il vient

$$(i) \quad n_j^0 = \frac{\alpha_{ij}^0}{E_{ur}^0 a_{ij}^0}, \quad \forall i \tag{3.22}$$

où α_{ij} est l'élasticité de préférence pour q_{ij} , E_{ur} l'élasticité-revenu de préférence, a_{ij} le coefficient budgétaire pour q_{ij} , tous à l'optimum.

$$(ii) \quad \sum_i \alpha_{ij}^0 = \frac{\sum_i a_{ij}^0}{n_j^0 E_{ur}^0} \tag{3.23}$$

Ceci est l'effet d'assortiment : $\sum_i \alpha_{ij}$ représente la somme des parts budgétaires des q_{ij} , c'est-à-dire l'achat total relatif effectué au centre j ; c'est parce que le consommateur aime acheter dans ce centre qu'il paie davantage que dans le modèle (3.17) !

Si (3.23) s'écrit sous la forme $n_j = E_{ur}^{-1} \cdot \frac{\sum_i \alpha_{ij}^0}{\sum_i a_{ij}^0}$, à élasticités de préférence constantes ($\sum_i \alpha_{ij}^0$), un nombre inférieur de

(1) J. PAELINCK et P. NICKAMP, Ch. 6.

visites se feront à j si les biens qui y sont disponibles mènent à des sommes d'achats plus élevées ($\sum_i a_{ij}^0$). Formellement, il faudrait montrer que $\partial n_j / \partial p_{ij} < 0$, ce qui sera fait ci-après.

3.3. Statique comparative.

Nous expliciterons maintenant quelques propriétés de l'expression (3.23).

Réécrivons, tout d'abord, le modèle (3.20) ainsi que ses contraintes :

$$u(q^*, n) \quad (3.24)$$

$$\sum_{ij} p_{ij} q_{ij} n_j + \sum_j c_j n_j = r \quad (3.25)$$

$$\sum_j t_j n_j = t \quad (3.26)$$

donnant les conditions nécessaires pour un optimum par rapport à q_{ij} et n_j :

$$u_{ij} = \lambda p_{ij} n_j \quad (3.27)$$

$$u_j = \lambda (\sum_i p_{ij} q_{ij} + c_j) + \mu t_j \quad (3.28)$$

En différenciant (3.25) à (3.28) par rapport à $p_{11}^{(1)}$, il vient

$$\sum_{ij} p_{ij} \frac{\partial q_{ij}}{\partial p_{11}} n_j + \sum_{ij} p_{ij} q_{ij} \frac{\partial n_j}{\partial p_{11}} + q_{11} n_1 + \sum_j c_j \frac{\partial n_j}{\partial p_{11}} = 0 \quad (3.29)$$

$$\sum_j t_j \frac{\partial n_j}{\partial p_{11}} = 0 \quad (3.30)$$

$$\sum_{ij} u_{11,ij} \frac{\partial q_{ij}}{\partial p_{11}} + \sum_j u_{11,j} \frac{\partial n_j}{\partial p_{11}} = \frac{\partial \lambda}{\partial p_{11}} p_{11} n_1 + \lambda n_1 + \lambda p_{11} \frac{\partial n_1}{\partial p_{11}} \quad (3.31a)$$

$$\sum_{ij} u_{k1,ij} \frac{\partial q_{ij}}{\partial p_{11}} + \sum_j u_{k1,j} \frac{\partial n_j}{\partial p_{11}} = \frac{\partial \lambda}{\partial p_{11}} p_{k1} n_1 + \lambda p_{k1} \frac{\partial n_1}{\partial p_{11}}, \quad \forall k1 \neq 1 \quad (3.31b)$$

$$\sum_{ij} u_{1,ij} \frac{\partial q_{ij}}{\partial p_{11}} + \sum_j u_{1,j} \frac{\partial n_j}{\partial p_{11}} = \frac{\partial \lambda}{\partial p_{11}} (\sum_i p_{i1} q_{i1} + c_1) + \lambda \sum_i p_{i1} \frac{\partial q_{i1}}{\partial p_{11}} + \dots$$

$$\dots + \lambda q_{11} + \frac{\partial \mu}{\partial p_{11}} t_1 \quad (3.32a)$$

(1) Ou n'importe quel autre p_{ij} .

$$\sum_{ij} u_{1,ij} \frac{\partial q_{ij}}{\partial p_{11}} + \sum_j u_{1,j} \frac{\partial n_j}{\partial p_{11}} = \frac{\partial \lambda}{\partial p_{11}} (\sum_i p_{i1} q_{i1} + c_1) + \lambda \sum_i p_{i1} \frac{\partial q_{i1}}{\partial p_{11}} + \frac{\partial \mu}{\partial p_{11}} t_1, \quad 1 \neq 1 \tag{3.32b}$$

Les trois termes exogènes sont $q_{11}n_1$, λn_1 et λq_{11} ;

les équations (3.29) à (3.32b) peuvent s'écrire sous la forme du système suivant :

$$\begin{matrix} 0 & -C_{k1} & -C_1 & \left[\frac{\quad}{p_{11}}, \frac{\quad}{p_{11}} \right] & \left[\begin{matrix} q_{11}n_1 \\ 0 \\ n_1 \end{matrix} \right] \\ -C'_{k1} & L_{k1,ij} & L_{k1,j} & \left[\frac{q_{ij}}{p_{11}} \right] & = \left[\begin{matrix} 0 \\ n_1 \end{matrix} \right] \\ -C'_1 & L_{1,ij} & L_{1j} & \left[\frac{n_j}{p_{11}} \right] & \left[\begin{matrix} 0 \\ q_{11} \\ 0 \end{matrix} \right] \end{matrix} \tag{3.33}$$

où C_{k1} et C_1 sont des matrices de dérivées partielles par rapport à q_{ij} et n_j des deux contraintes, $L_{k1,ij}$ etc., les matrices des dérivées partielles du Lagrangien.

(3.33) donne la solution suivante pour l'élasticité de n_1 par rapport à p_{11} :

$$\frac{En_1}{Ep_{11}} = a_{1,11} (\sigma_{1,11} + E_{1,11} - +_{1,r}) \tag{3.34}$$

une généralisation de la relation bien connue de Hicks-Allen. Ici $a_{1,11}$ est la part budgétaire

$$a_{1,11} \stackrel{\Delta}{=} p_{11} \cdot q_{11} n_1 r^{-1} \tag{3.35}$$

et $\sigma_{1,11}$ et $E_{1,r}$ sont respectivement l'élasticité directe de substitution et l'élasticité-revenu de n_1

Le signe de $\sigma_{1,11}$ doit être négatif (1) le signe de $E_{1,r}$ est normalement positif. Finalement, $E_{1,11}$ est une élasticité croisée (complémentaire entre 1 et 11) ; si le centre 1 est le bien 11 sont complé-

(1) Condition suffisante pour un maximum contraint de u ; voir M.J.PANIK, (1976) p. 220, Théorème 10.5

mentaires, (on aime acheter le bien 11 au centre 1 !), on a normalement $E_{1,11} < 0$, et en général

$$En_1 E^{-1} p_{11} < 0 \quad (3.36)$$

suggéré par (3.23)

3.4. - La recherche de solutions explicites

(a) Dans le cas d'une fonction addilog pour le modèle (3.23) ce modèle devient

$$u = \prod_{ij} q_{ij}^{\alpha_{ij}} n_j^{\alpha_j} \quad (3.37)$$

$$\sum_{ij} \alpha_{ij} + \sum_j \alpha_j = 1 \quad (3.38)$$

$$\sum_{ij} n_j p_{ij} q_{ij} + \sum_c c_j n_j = r \quad (3.39)$$

$$\sum_j t_j n_j = t \quad (3.40)$$

Définissons

$$\alpha \triangleq \sum_{ij} \alpha_{ij} \quad (3.41)$$

$$\beta_j \triangleq \sum_i \alpha_{ij} \quad (3.42)$$

$$d \triangleq r - \sum_j c_j n_j \quad (3.43)$$

$$p_j \triangleq \sum_i p_{ij} q_{ij} \quad (3.44)$$

Nous différencions le Lagrangien (3.37) à (3.40) par rapport à q_i et nous obtenons

$$\alpha_{ij} u = \lambda n_j p_{ij} q_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.45)$$

d'où, en sommant (3.45) sur tout i, j

$$\alpha u = \lambda d \quad (3.46)$$

et

$$n_j^o = \frac{\beta_j}{\alpha} \frac{d^o}{p_j^o} \quad (3.47)$$

un résultat correspondant à l'équation (3.23) et, formellement au moins, analogue aux résultats addilog (voir par exemple, l'équation (3.10)) ; (3.47) est évidemment additive par rapport à j.

Par une nouvelle différenciation du Lagrangien approprié de (3.37) à (3.40) par rapport à n_j , il vient

$$\alpha_j u = \lambda(p_j + c_j)n_j + \mu t_j n_j \quad (3.48)$$

et sommant sur j

$$(1 - \alpha) u = \lambda r + \mu t \quad (3.49)$$

(3.48) avec (3.46) et (3.49) nous permettent de calculer

$$p_j^0 = \frac{\alpha_j}{\alpha} \frac{d^0}{n_j} - c_j - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} d^0 \frac{t_j}{t} + r \frac{t_j}{t} \quad (3.50)$$

qui, substituée dans (3.34), donne

$$n_j^0 = \frac{\beta_j d^0 n_j t}{\alpha_j d^0 t - \alpha c_j n_j t - (1 - \alpha) t_j n_j d^0 + \alpha t_j n_j r} \quad (3.51) (1)$$

d'où le système suivant dans les n_j optimaux

$$A_j n_j + \sum_{i=1}^r A_{ji} n_i + \sum_{i=1}^r B_{ji} n_j n_i = C_j, \quad \forall j \quad (3.52)$$

où

$$A_j \stackrel{\Delta}{=} (2\alpha - 1)t_j r - \alpha c_j t \quad (3.53)$$

$$A_{ji} \stackrel{\Delta}{=} (\beta_j - \alpha_j) c_i t \quad (3.54)$$

$$B_{ji} \stackrel{\Delta}{=} (1 - \alpha) t_j c_i \quad (3.55)$$

$$C_j \stackrel{\Delta}{=} (\beta_j - \alpha_j) t r \quad (3.56)$$

On peut démontrer que le résultat (3.51) est additif par rapport à j, comme il se doit.

Ce qui est curieux cependant, c'est que (3.52) nous permette de calculer les n_j seulement en termes de c_j et des t_j , indépendam-

(1) Le q_{ij}^0 optimal est égal à $\frac{\alpha_{ij} (r - \sum_k c_k n_k^0)}{\alpha n_j p_{ij}}$

ment des p_{ij} , alors que les derniers apparaissent dans (3.47), un cas particulier de l'équation (3.23). Ce résultat est probablement dû à l'utilisation de la fonction addilog (3.37), dont il est connu qu'elle donne des résultats séparables en termes de fonctions de demande, malgré que (3.51) ne soit pas séparable pour chaque fonction de demande n_j ,

$$n_j = n_j(r, t, \underline{c}, \underline{t}) \quad (3.57)$$

Nous examinerons ensuite le cas de la fonction (3.5), que nous avons appelée la fonction d'utilité "intelog", pour des raisons évidentes.

(b) Nous définissons la fonction d'utilité intelog comme suit :

$$\sum_i \beta_i^{-1} x_i (1 + \ln \alpha_i - \ln x_i) \quad (3.58)$$

Pour le modèle d'achat nous obtenons l'équation

$$u = \sum_{ij} \beta_{ij}^{-1} q_{ij} (1 + \ln \alpha_{ij} - \ln q_{ij}) + \sum_j \beta_j^{-1} n_j \dots \\ \dots (1 + \ln \alpha_j - \ln n_j) \quad (3.59)$$

avec

$$\sum_{ij} p_{ij} q_{ij} n_j + \sum_j c_j n_j = r \quad (3.60a)$$

$$\sum_j n_j t_j = t \quad (3.60b)$$

La différenciation par rapport à q_{ij} donne

$$\beta_{ij}^{-1} \ln \alpha_{ij} - \beta_{ij}^{-1} \ln q_{ij} = \lambda p_{ij} n_j \quad (3.61)$$

ou

$$q_{ij} = \alpha_{ij} e^{-\beta_{ij} \lambda p_{ij} n_j} \quad (3.62)$$

La différenciation par rapport à n_j donne

$$\beta_j^{-1} \ln \alpha_j - \beta_j^{-1} \ln n_j = \lambda (p_j + c_j) + \mu t_j \quad (3.63)$$

où p_j est défini par (3.44) ; (3.63) peut s'écrire

$$n_j = \alpha_j e^{-\beta_j [\lambda (p_j c_j) + \mu t_j]} \quad (3.64)$$

Dans (3.64) les q_{ij} apparaissent toujours dans p_j ; la linéarisation de (3.63) donne :

$$n_j \approx \alpha_j [1 - \beta_j \lambda (p_j + c_j) - \beta_j \mu t_j] \quad (3.65)$$

la linéarisation de (3.62), multipliée par p_{ij} et sommée sur i donne

$$p_j \stackrel{\Delta}{=} \sum_i p_{ij} q_{ij} \stackrel{\Delta}{=} \sum_i p_{ij} \alpha_{ij} - \lambda n_j \sum_i p_{ij}^2 \alpha_{ij} \beta_{ij} \quad (3.66)$$

Combinant (3.65) et (3.66), il vient :

$$n_j \approx (1 - \alpha_j \beta_j \lambda^2 \sum_i p_{ij}^2 \alpha_{ij} \beta_{ij})^{-1} \times \\ \times \alpha_j [1 - \lambda \beta_j (\sum_i p_{ij} \alpha_{ij} + c_j) - \mu \beta_j t_j] \quad (3.67)$$

d'où il faut encore éliminer λ et μ par (3.61) ; cela ne peut se faire de la manière simple exprimée par (3.50). Cependant, le résultat (3.67) est intéressant en soi puisqu'il montre que la fréquence de visites aux points d'achat j est influencée par leurs niveaux de prix p_j , où cette fois p_j n'est pas éliminé et peut être calculé comme la somme pondérée.

$$p_j \approx \sum_i p_{ij} \alpha_{ij} \quad (3.68)$$

les coefficients d'attractivité, par rapport aux biens, servant de poids, ce qui semble logique.

Le problème de l'élimination élégante de λ et de μ nous amène à la formulation générale suivante.

3.5. - Fonctions de consommation doublement additives, un problème en analyse d'équations fonctionnelles (1).

Si nous écrivons, par exemple, la condition (3.19) sous sa forme générale

$$u_i = \lambda p_i + \mu t_i \quad (3.69)$$

nous pouvons faire usage de la variable auxiliaire x_i pour transformer u_i identiquement en

(1) Voir J. ACZEL, (1966).

$$u_i^1 \equiv u_i^* \cdot x_i \quad (3.70)$$

où

$$u_i^* \approx u_i^1 x_i^{-1}$$

l' "utilité marginale moyenne".

Cela nous permet d'écrire le système (3.3) et (3.7) sous la forme

$$\begin{array}{cccc} \hat{u}^* & -F & \underline{x} & \underline{0} \\ \hline -F' & 0 & \underline{\rho} & \underline{-s} \end{array} \quad (3.72)$$

où \hat{u}^* est la matrice diagonale des u_i^* , F la matrice des p_i et des t_i , $\underline{\rho}$ le vecteur de λ et $\underline{\mu}$ et \underline{s} le vecteur de r et t . L'équation matricielle (3.72) peut facilement se généraliser au cas de plus de deux contraintes.

La solution (3.72) donne

$$\underline{x} = \hat{u}^{*-1} F(F'\hat{u}^{*-1}F)^{-1} \underline{s} \quad (3.73)$$

pour laquelle il s'agit de trouver des conditions simples permettant, par exemple, d'exprimer les x_i comme fonctions "séparables" de leurs p_i , t_i , r et t ⁽¹⁾ correspondants. Il ne faut pas oublier toutefois, que chaque u_i pourrait être une fonction des $x \neq x_i$; un cas semi-séparable notoire est celui où u est une fonction quadratique de x . Prenons comme point de départ, suivant cette dernière spécification, la fonction d'utilité directe-indirecte (2) mixte

$$u = \frac{1}{2} \sum_i \alpha_i e^{f(r,t,p_i,t_i)} x_i^2 \quad (3.74)$$

Si on spécifie f suivant (3)

$$f = -g(r,t) + \beta_i p_i + \gamma_i t_i \quad (3.75) \quad (4)$$

(1) En fait, (3.73) est identique en \underline{x} , et les équations implicites en \underline{x} sont $i = \hat{u}^{-1} F(F'\hat{u}^{-1}F)^{-1} \underline{s}$. (3.73) est aussi identiquement additive en \underline{r} et \underline{t} .

(2) Une fonction indirecte ou fonction de Roy est définie comme $u \triangleq u(\underline{p}, \underline{t}, r, t)$

(3) Dans le cas du comportement d'achat, il s'agit également de soustraire du résultat (3.68) un indice du coût d'achats en $j : \sum_i \alpha_{ij} p_{ij}$

(4) Voir note (2) ci-dessus.

on dérive

$$u_i^{*-1} = \tilde{\alpha}_i(r,t) e^{-\beta_i p_i - \gamma_i t_i} \quad (3.76)$$

une forme étroitement liée au comportement exponentiel négatif dans les modèles de friction, cette fois avec des paramètres β_i et γ_i constants.

L'expression (3.76) mène à la fonction additive de demande suivante

$$x_i = (w_{11}c_i + w_{21}t_i)^{-1} u_i^* r + (w_{12}c_i + w_{22}t_i)^{-1} u_i^* t \quad (3.77)$$

où les w_{ij} sont les termes de $(F'u_i^{*-1}F)^{-1}$.

L'expression (3.77) montre que la fonction additive de demande sous deux contraintes qui en résulte a en principe deux termes, puisque l'un des termes entre parenthèses ne peut pas être identiquement égal à zéro. Les w_{ij} sont en fait des termes en p_i^{-2} et t_i^{-2} , de telle sorte que les termes de (3.77) sont, entre autres, des généralisations de l'expression addilog (3.51).

Il faut conclure que des fonctions de demande formellement spécifiées suivant (3.76) ne sont que des approximations par rapport à des fonctions de demande additives dérivées à partir de fonctions d'utilité ; elles devraient être combinées à d'autres paramètres, comme (3.77) le montre clairement.

Trois points supplémentaires doivent être ajoutés à l'analyse.

Tout d'abord, (3.77) peut s'écrire sous sa forme condensée

$$x_i = \xi_i e^{-\beta_i p_i - \gamma_i t_i} \quad (3.78)$$

ce qui nous ramène à (3.1) ; toutefois, il ne faut pas oublier que

$$\xi_i = \xi_i(\underline{p}, \underline{t}, r, t) \quad (3.79)$$

En second lieu, il reste la question de savoir si (3.74) est une fonction d'utilité admissible (1). Elle peut s'écrire

$$u = \sum_i \alpha_i (\xi_i^2)^{-g(r,t)} (e^{\beta_i p_i - \gamma_i t_i}) \quad (3.80)$$

qui devrait être combiné avec (3.79). En fonction du choix de $g(r,t)$,

(1) Cfr. L. KLAASSEN, (1976) ; voir aussi L. KLAASSEN, J. PAELINCK et S.J. WAGENAAR, (1978).

(3.80) pourrait s'exprimer comme une fonction de Roy avec $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial t} > 0$,
 $\frac{\partial u}{\partial p_i}, \frac{\partial u}{\partial t_i} < 0$.

Finalement, (3.78), en tant qu'approximation d'une fonction de demande, peut être agrégée par rapport à r , et parfois par rapport à t . La dernière procédure est simple; si on accepte, par exemple que

- r a une distribution exponentielle négative,
- t à une distribution rectangulaire ;

$$- \xi_i = \xi_e \delta_i r + \epsilon_i t, \quad \forall i ;$$

et en supposant tous les p_i et t_i égaux pour tous les consommateurs :

$$X_i = \xi \int_0^{\infty} \int_a^b e^{-\xi r} e^{\delta_i t} dr dt e^{-\beta_i p_i - \gamma_i t_i} = \xi_i(R, T) e^{-\beta_i p_u - \gamma_i t_i} \quad (3.81)$$

Les difficultés commencent lorsque l'on considère la dispersion spatiale de la population ; dans ce cas, les p_i et les t_i ne sont plus invariants par rapport aux individus, et une hypothèse sur la dispersion spatiale de la population et des points de vente doit être introduite.

4 - CONCLUSION.

Tant pour le consommateur que pour le producteur, une intégration plus grande du comportement de transport dans les modèles mène, en effet, à des extensions utiles de résultats connus ; si dans le cas du producteur des résultats partiels du problème de transport suivant e.a. EILON étaient intégrés, des résultats de domaine de l'analyse de marchés (1) pourraient et devraient être incorporés dans nos modèles spatiaux du consommateur.

Le présent article s'est borné à présenter quelques résultats, mais nous pensons que des recherches ultérieures permettront d'étendre de manière significative nos connaissances théoriques et nos modèles opérationnels.

5 - REFERENCES.

ACZEL, J, *Lesson in Functional Equations*, New-York, Academie Press, 1966.

BECJMANN, M., Market Share, distance and potential, *Regional and Urban Economics : Operational Methods*, Vol. 1, n° 1, 1971, pp. 3-18.

(1) La fréquence d'achat, les achats combinés ; voir par exemple, A. VAN HETEREN, (1976). D'autres aspects devraient être mentionnés : le mode de transport, le confort, etc...

- BOS H.C., *The Spatial Dispersion of Economic Activity*, Rotterdam University Press, 1964.
- DOMEMCHI J.A. and Mc FADDEN. D., *Urban Travel Demand, a behavioral analysis*, A CRA Research Study, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1975.
- EILON. S., WATSON-GANDY, C.D.T., CHRISTOFIDES. N., *Distribution Management, Mathematical modelling and practical analysis*, London, Griffin, 1971.
- HETEREN. A.H.P., *Winkelmobiliteit en de detaillisten*, *Economisch-Statistische Berichten*, n° 3049, 21 april 1976, pp. 385-391.
- HOOVER. E., *The Location of Economic Activity*, New-York, Mc Graw Hill, 1948.
- ISARD W., *Location and Space Economy*, Cambridge, M.I.T. Press, 1956.
- A simple rationale for gravity model type behavior, *Papers of the Regional Science Association*, vol. 35, 1975, pp. 25-30.
- KLAASSEN L., A note on the relation between utility factors and distribution function, *Netherlands Economic Institute*, april 1976, (mimeographed).
- KLAASSEN L.H., PAELINCK J.H.P., and WAGENAAR S., *Spatial Structures*, Rotterdam, Netherlands Economic Institute, 1977 (to appear).
- PANIK M.J. *Classical Optimization : Foundations and Extensions*, Amsterdam and New York, Nth Holland and Elsevier, 1976.
- KLAASSEN L., A note on the relation between utility factors and distribution function, *Netherlands Economic Institute*, april 1976, (mimeographed).
- KLAASSEN L.H., PAELINCK J.H.P., and WAGENAAR S., *Spatial Structures* Rotterdam, Netherlands Economic Institute, 1978 (forthcoming).
- PAELINCK J., Discussion of A. Wilson (1970) in *Urban Studies*, 10, 1973, pp. 280-281.
- PAELINCK J. and NIJKAMP P. *Operational Theory and Method in Regional Economics*, Saxon House and Lexington, 1975.
- PHILIPS L., *Applied Consumption Theory*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1974.
- RICHARDS M.G. and BEN-AKIVA M.L., *A Disaggregate Travel Demand Model*, Farnborough, Saxon House, 1975.
- ROTTIER G., *Econométrie appliquée*, Paris, Dunod, Série "Finance et Economie Appliquée", n° 51, 1975.
- STAHL C.O., *Market Failures and the Allocation of Resources in Cities* Ph. D. University of California, Bailey, 1974 (mimeographed)
- THISSE J. *Contribution à la Théorie Microéconomique Spatiale*, Thèse Université de Liège, 1975 (mimeographed).
- WILSON A.G., *Entropy in urban and regional modelling*, London, Pion, 1970.