L'adaptation de la théorie du choix des investissements au nouvel environnement économique : le cas particulier de l'incertitude

par Emile QUINET
SAE

Le corps de doctrine qui fait actuellement force de loi en matière de choix des investissements de transport est encore issu de réflexions datant de l'immédiat après-guerre. Son expression la plus complète est constituée par le calcul économique. Celui-ci part d'hypothèses sur le comportement des consommateurs et sur la répartition des revenus. Il suppose que les consommateurs peuvent exprimer des choix cohérents, c'est-à-dire classer par ordre de préférence les éventualités qu'on leur propose, le classement respectant quelques hypothèses logiques dont la plus importante est la transitivité. Il suppose, en outre, que la répartition des revenus de la société est optimale. Moyennant quelques hypothèses supplémentaires d'ordre mathématique, on peut, à partir de là, démontrer que le bon indicateur pour le choix des projets est le surplus :

$$\sum_i p_i \, d_{q_i}$$

i : les différents biens

p_i : le prix à la consommation du bien i avant exécution du projet

d_{q_i} : variation de la quantité consommée du bien i entre la situation avant investissement et la situation après.

L'application de cette formule au cas particulier des transports a conduit, on le sait, aux règles d'usage courant :

- entre deux projets exclusifs l'un de l'autre il faut réaliser celui qui apporte le bénéfice actualisé le plus fort.

- Un projet doit être réalisé lorsque sa rentabilité immédiate est égale au taux d'actualisation du plan.

C'est ce corps de doctrine, ainsi brièvement résumé, qui constitue la base théorique du choix des investissements d'infrastructure de transports.

Il porte la marque de son époque, et les modalités de sa mise en œuvre n'ont fait que l'accuser.

Les caractéristiques et la mentalité des années 50 nous semblent, maintenant, avec le recul, particulièrement simples et cohérentes. Le monde sortait de la guerre, sa tâche était encore la construction, les volontés restaient tendues vers le qualitatif ; l'objectif reconnu était la croissance économique, qu'il fallait la plus forte possible, et cet objectif était unanimement admis par toutes les couches de la population. L'évolution qu'on pouvait prévoir était dirigée vers "davantage" et non vers "autre chose".

Il ne faut pas s'étonner si les méthodes économiques mises au point dans ce climat intellectuel et moral s'en soient trouvées fortement influencées. Elles sont largement fondées sur une logique très classique, et participent d'un état d'esprit voisin de celui qui animait le déterminisme scientifique du 19ème siècle :

- Elles supposent la continuité des évolutions ; les modèles qui sous-tendent l'aide à la décision contiennent en effet une forte dose de continuité, notamment pour l'évolution des trafics, ou celle des prix, et il faut reconnaître que pendant longtemps cette hypothèse s'est trouvée bien vérifiée. Mais à l'heure actuelle, on vit dans les ruptures. Depuis 1974, l'évolution économique en est remplie : crises énergétiques, désordres économiques internationaux, crises dans différents secteurs d'activités.

- Elles sont fondées sur l'hypothèse d'un concensus social, celui du bien-être économique quantitatif, qui permet de parler d'une fonction d'utilité collective, et qui permet aussi d'enfermer en un seul chiffre, la rentabilité, toutes les conséquences d'un projet. Actuellement, les points de vue se sont diversifiés, le concensus social n'existe plus, et l'on constate l'émergence d'une série de groupes sociaux ayant chacun leur particularité propre et leur échelle de valeurs ; ces échelles de valeurs comprennent de plus en plus de facteurs non quantitatifs, qui ressortent du domaine qualitatif.

- Elles font l'hypothèse que les spécialistes qualifient "d'univers certain" ; elles rejettent l'existence du hasard ; or, celui-ci, relativement faible dans bien des branches de la connaissance humaine, est au contraire essentiel dans toutes les matières traitées par l'aide à la décision qui peut prévoir l'avenir avec certitude ; qui peut avoir une connaissance sans erreur du comportement des individus, de leurs réactions devant telle ou telle situation. Il s'agit pourtant de situations courantes dans l'aide à la décision, et l'incertitude qui leur est attachée va croissant.

Les conditions actuelles imposent un dépassement de ces conceptions, et une modification corrélative des critères de choix d'investissements.

Déjà, de nombreux pas ont été faits pour une prise en compte des éléments qualitatifs ; le développement des analyses multicritères l'atteste. On devrait toutefois s'interroger sur la raison pour laquelle les réflexions théoriques sur ce sujet ont si rarement conduit à une mise en application concrète.

Mais c'est sur les discontinuités et les incertitudes qu'on voudrait se pencher. Elles constituent le tissu du monde moderne, l'ambiance qui est désormais la nôtre. Il convient donc que nos méthodes de choix tiennent désormais compte de ces aléas. Or, jusqu'ici, les calculs de rentabilité réels en font largement abstraction. Ils supposent que tous les paramètres de base sont exactement connus, et pour les évolutions futures se placent délibérément un univers incertain.

Dans les transports, cette hypothèse est de moins en moins vraisemblable. L'activité y est en effet subordonnée à la croissance économique d'ensemble, tant pour les marchandises que pour les voyageurs ; et l'on sait combien incertaines sont les prévisions en ce domaine. Elles dépendent non seulement du volume de la croissance, mais aussi de son contenu : selon la nature des produits fabriqués, selon leur origine nationale ou extérieure, ce sont des modes de transport différents, des axes différents qui seront en jeu. De même, en matière de transports de voyageurs, les habitudes de vie, la structure de l'urbanisation, les évolutions psychologiques peuvent influer profondément sur le volume et la nature des déplacements.

Mais c'est surtout peut-être au niveau des coûts que l'incertitude est la plus forte ; et l'on voudrait citer ici les aléas qui planent sur l'approvisionnement et les prix pétroliers. Les taux de croissance du trafic qui résultent des hypothèses raisonnables qu'on peut faire en matière de prix varient dans de fortes proportions ; ainsi en matière routière, ils se situent entre 1 % et 3 %. Quant aux conséquences d'un rationnement quantitatif important, elles seraient encore plus fortes.

Ces facteurs d'incertitude liés aux nouvelles conditions économiques s'ajoutent d'ailleurs aux aléas bien connus et tout-à-fait classiques qui font que le trafic sur un axe est mal connu, que son évolution dans le temps est hachée, et peut subir des inflexions imprévues, que les coûts et prix se modifient de façon souvent erratique même dans des conditions économiques inchangées.

Sur le plan théorique, l'aide à la décision s'est depuis longtemps attachée à fournir des méthodes de traitement de l'incertitude qui sont bien connues des théoriciens ; de même, l'étude des ruptures fait depuis quelques temps l'objet d'analyses morphologiques notamment grâce à la théorie des catastrophes. Mais les applications de tout cela se font attendre ; le sentiment prévaut que ces méthodes offertes par la théorie sont complexes et inutilisables dans la pratique. La thèse soutenue ici est qu'au contraire il est souvent possible de traiter simplement des situations d'incertitude, et d'arriver par des méthodes relativement simples à des résultats opératoires.

On prendra pour cela l'exemple des calculs de rentabilité routiers, mais il est bien évident que les mêmes développements sont valables pour les autres infrastructures de transport. Après un rappel succinct des critères de choix en avenir certain et des modalités d'introduction de l'incertitude dans ces critères, on analysera quelques situations concrètes d'incertitude et les modifications de règles de choix qui en résultent.

I - PRINCIPES GENERAUX DE CRITERES DE CHOIX

Avec les hypothèses et dans la cadre de la théorie micro-économique classique, les critères de choix d'investissement en avenir certain sont bien connus ; ils sont résumés ici avec les notations suivantes :

t : repérage continu du temps

j : taux d'actualisation continu

$a(t)\,dt$: avantage procuré par l'investissement entre t et t + dt

C : coût de réalisation

t_o : date optimale de mise en service

$B(t)$: bénéfice actualisé de l'opération supposée mise en service à la date t.

Le choix des investissements repose sur la considération du bénéfice actualisé qu'il faut rendre maximum.

$$B(\theta) = \int_{\theta}^{+\infty} a(t)\, e^{-jt} dt - C\, e^{-j\theta}$$

Il en résulte les deux règles fondamentales suivantes :

1) *Date optimale de réalisation*

Un investissement qu'on a décidé de réaliser doit être mis en service à l'année t_o telle que $B(t_o)$ soit maximum, ce qui est obtenu sous des conditions assez générales (1) lorsque $\frac{a(t)}{C} = j$

2) *Choix entre variantes compatibles :*

Il convient alors de choisir celle qui rapporte le bénéfice actualisé le plus élevé, les différentes variantes étant bien sûr supposées mises en service chacune à leur date optimale de réalisation.

(1) Croissance de a(t), indépendance de a(t) vis-à-vis de t_o.

On vérifie facilement que ces deux règles permettent de résoudre tous les problèmes de programmation : comment choisir entre différents projets alternatifs, quand réaliser les opérations, de quel montant doivent être les enveloppes d'investissement de chaque année (1).

Mais elles ne sont valables qu'en avenir certain.

Il faut maintenant voir ce qu'elles deviennent en situation d'incertitude. Il y a différentes manières de caractériser l'incertitude : on a choisi ici la situation dans laquelle les événements possibles peuvent être affectés de probabilités, et cela pour deux raisons : elle constitue d'abord une schématisation acceptable de la réalité ; et ensuite, motif moins avouable, le traitement mathématique est relativement aisé.

On supposera en outre que l'incertitude provient de l'existence, dans l'expression de bénéfice actualisé, d'une ou plusieurs variables aléatoires dont la loi de probabilité est connue. Cette hypothèse permet de bien traduire la plupart des situations d'incertitude courantes. Les situations d'incertitude sont en effet de deux sortes :

- Il y a d'abord celles du type "erreur de mesure" ; c'est en général à elles que l'on songe d'abord ; elles affectent principalement le coût du projet, généralement assez mal connu au stade du dossier sommaire, et le trafic de la route, estimé au moyen d'un sondage, donc imparfaitement. Mais elles affectent aussi, de façon plus subtile, les coefficients qui entrent dans le calcul des avantages ; les lois d'écoulement du trafic, les taux d'accidents, les valeurs unitaires des avantages ne sont en effet qu'imparfaitement connus, et certains de ces éléments sont, par nature même, stochastiques, comme par exemple les courbes vitesse-débit ou les taux d'accidents ;

- Mais il y a aussi les incertitudes du type "erreur de prévision" qui portent essentiellement sur les trafics futurs, dont la prévision ne saurait être parfaite, pour des raisons bien évidentes, mais aussi sur des paramètres telle que l'évolution des valeurs unitaires (valeur du temps, valeur de l'énergie), ou les conséquences du progrès technique. L'incertitude sur ces grandeurs peut se traduire de différentes manières ; la plus satisfaisante serait probablement de supposer que leur accroissement d'une année sur l'autre obéit à un processus de Markov ; mais une hypothèse plus simple à traiter et presque aussi représentative de la réalité revient à prendre comme variable aléatoire le taux de croissance supposé constant.

Voici quelques situations qui peuvent être traitées par l'un ou l'autre des modèles esquissés :

(1) On peut s'interroger sur le point de savoir si c'est là la bonne solution ; ainsi est-il justifié de fixer par cette procédure les enveloppes globales annuelles ? Mais là n'est pas notre propos.

1) Incertitude du type "erreur de mesure" :

- Incertitude sur le coût de l'investissement.

- Incertitude sur la valeur de paramètres entrant dans la formulation des avantages annuels. Ainsi les avantages annuels font intervenir les courbes vitesse-débit ; or ces courbes résultent d'évaluations statistiques entâchées d'une imprécision assez forte.

- Incertitude sur le niveau actuel de trafic. Le niveau actuel de trafic sur l'axe futur résulte de comptages ou de l'application de modèles entâchés d'erreur.

2) Incertitude du type "erreur de prévision" :

- Le taux de croissance du trafic est affecté d'un aléas dont on ne connaîtra la valeur qu'à une date ultérieure θ. C'est un schéma de la situation où l'on ne dispose pas encore d'éléments pour évaluer précisément la croissance du trafic, mais où d'ici quelques années l'évolution constatée permettra de trancher.

- A partir d'une certaine date, il est possible que le trafic arrête d'augmenter. C'est un moyen de prendre en compte par exemple l'éventualité d'une crise énergétique.

- A partir d'une certaine date, le taux de croissance du trafic peut prendre différentes valeurs affectées de probabilités.

- Tous ces cas, appliqués précédemment aux taux de croissance du trafic pourraient l'être à d'autres paramètres, tels que l'évolution de la valeur du temps, du prix de l'énergie ou des taux de salaires.

Donnons quelques exemples du traitement de ces situations :

1) Incertitude sur le coût de réalisation d'une opération :

Le coût réel d'une opération future est inconnu, et ne sera connu exactement qu'une fois l'opération réalisée ; en attendant, on n'en a qu'une estimation, qui est celle faite par le projeteur, soit C ; le coût réel, inconnu, est une variable aléatoire C de densité de probabilité p(C) ; et si le projeteur est honnête et compétent, son estimation sera la moyenne de la variable aléatoire C.

$$\bar{C} = \int_C C p(C) dC$$

A toute décision éventuelle de mise en service à une date t_o correspondra un bénéfice actualisé qui sera une variable par l'intermédiaire de C ; il aura pour expression :

$$B(C,t_o) = \int_{t_o}^{\infty} a(t) \exp(-jt)\, dt - C \exp(-jt_o)$$

A l'instant t_o, on ne connaît pas B (C,t_o) puisqu'on ne connaît pas le coût C ; on peut seulement déterminer l'espérance du bénéfice actualisé.

$$EB(t_o) = \int_C^{\infty} p(C) \int_{t_o} a(t) \exp(-jt)\, dt - C \exp(-jt_o)\, dC$$

ce qui s'écrit :

$$(2) \quad EB(t_o) = \int_{t_o}^{\infty} a(t) \exp(-jt)\, dt - \bar{C} \exp(-jt_o)$$

puisque :

$$\bar{C} = \int_C C p(C)\, dC$$

Notons au passage que ce calcul est un cas particulier de la propriété générale :

$$E\left(B(x)\right) = B\left(E(x)\right)$$

valable si B est une fonction linéaire de x.

Cette propriété simple et précieuse sera d'un usage fréquent par la suite.

L'expression (2) fournit, pour chaque date de mise en service envisageable t_o, l'espérance de bénéfice actualisé correspondant. Il s'agit de choisir t_o de façon que $E\, B(t_o)$ soit maximum, et on trouve facilement, par dérivation par rapport à t_o, la relation :

$$a(t_o) = j\bar{C}$$

c'est la règle usuelle de détermination de la mise en service, qui reste inchangée pourvu que le coût pris en compte soit bien l'espérance mathématique du coût futur.

De même l'espérance de bénéfice, à utiliser pour la comparaison entre variantes, a toujours l'expression :

$$(3) \quad E(B) = \int_{t_o}^{\infty} a(t) \exp(-jt) - \bar{C} \exp(-jt_o)$$

où t_o est la date optimale de mise en service précédente.

On voit donc que dans cette catégorie d'incertitude, les règles utilisées jusqu'ici restent tout-à-fait valables. Ce résultat se généralise au cas où l'on considère non plus une opération isolée, mais une séquence temporelle d'opérations : toutes les relations et règles usuelles restent valables en cas d'incertitude sur les coûts (1), à con-

(1) Avec toutefois une restriction : il est nécessaire que les dispersions des variables aléatoires "coûts" soient suffisamment faibles pour que l'ordre souhaitable d'éxécution des opérations de la séquence ne puisse pas être inversé ; on se convaincra aisément que dans la pratique, cette restriction n'a pas d'effet.

dition que les estimations des coûts que l'on fait intervenir en soient bien les espérances mathématiques.

Il ne faudrait pas, bien sûr, déduire de ce qui précède qu'il est sant intérêt d'augmenter la précision de l'estimation des coûts de construction. Il est au contraire facile de montrer que la perte probable qui résulte d'une incertitude sur les coûts croît rapidement avec leur dispersion.

Pour le voir, considérons le cas où il n'y a pas de variante à l'opération projetée, et où la seule décision à prendre est par conséquent le choix de la date de mise en service.

On réalise la mise en service à la date t_o telle que :

$$\frac{a(t_o)}{j} = \bar{C}$$

et quelque soit le coût réel C puisque celui-ci est inconnu.

Le bénéfice actualisé réel que l'on obtiendra (et qu'on ne pourra calculer qu'une fois C connu, c'est-à-dire une fois l'ouvrage réalisé ; auparavant, on ne connaît que E (B) donné par la relation (3), est :

$$B(C) = \int_t^\infty a(t) \exp(-jt)\, dt - C \exp(-jt_o)$$

toutefois, si l'on avait su auparavant que le coût serait C, on eut réalisé l'opération à la date t' telle que :

$$a(t') = j\, C$$

et le bénéfice obtenu aurait été :

$$B'(C) = \int_t^\infty a(t) \exp(-jt)\, dt - C \exp(-jt')$$

évidemment, $B'(C) > B(C)$.

L'ignorance de la valeur du coût a, dans ce cas, entraîné une perte :

$$B'(C) = B'(C) - B(C)$$

Cette perte a la probabilité p (C) d C de se produire. La perte moyenne est :

$$\bar{P} = \int P(c)\, p(C)\, dC$$

en supposant :

1°) que les avantages sont proportionnels au trafic (1ère approximation de lois plus complexes) ;

2°) que le trafic évolue dans le temps selon la loi $T = T_o(1 + x\ t)$

$\bar{C} = C\ (1 + u)$

on trouve facilement

$$\bar{P} \simeq \frac{(Ce^{-jt_o})^2}{2B} \times \sigma_u^2 \qquad (4)$$

expression dans laquelle :

- C est le coût moyen de l'opération ;
- B son bénéfice moyen donné par (3) ;
- t_o la date de mise en service ;
- $\sigma 2_u$ la variante de la variable aléatoire u,

ou si l'on actualise à la date de mise en service, en appelant B_o le bénéfice actualisé à cette date et en posant : $B_o = \lambda C$:

$$\frac{P}{B_o} \equiv \frac{\sigma_u^2}{2\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda^2}\left[\frac{\sigma_C}{C}\right]^2$$

Prenons par exemple le cas d'une opération estimée à $\bar{C} = 10^7$ francs, dont le bénéfice B est de 10^7 F., à mettre en service dans les toutes prochaines années ($T_o = 0$), et pour laquelle l'incertitude sur le coût est de 30 % ($\sigma_u = 17$ %) (1).

Alors, la perte issue de l'incertitude sur les coûts est de $\bar{P} = 0{,}015\ C = 150\ 000$ F.

Si l'erreur sur le coût était double, la perte probable serait 4 fois plus élevée. La perte croît donc rapidement avec l'incertitude. On voit d'autre part qu'elle est d'autant plus élevée que le rapport $\frac{B_o}{C}$, qui représente le bénéfice par franc investi est plus faible. Or, le bénéfice par franc investi dépend étroitement de la croissance du trafic. Dans l'avenir, la croissance du trafic sera plus lente, les rapports $\frac{B}{C}$ moyens plus faibles, et les pertes dues à l'incertitude plus élevées.

On peut tirer de cet exemple un certain nombre de conclusions générales, sur l'incertitude du type "erreur de mesure", c'est-à-dire celle qui porte sur les coûts de construction, le trafic initial, et les coefficients techniques entrant dans la formulation des avantages.

---

(1) D'habitude les ingénieurs définissent la précision des estimations par un pourcentage : "L"estimation est bonne à 20 % près par exemple". Qu'en déduire sur la variance au sens probabiliste de cette estimation ? Il n'est pas illogique de penser qu'à une estimation vraie à X % correspond une densité de probabilité à peu près uniforme et étendue x, soit une variance de $\frac{x^2}{3}$ ou un écart-type de $\frac{x}{\sqrt{3}}$. C'est cette position qui sera systématiquement adoptée par la suite.

Si les estimations de ces divers éléments correspondent bien aux moyennes, les procédures habituelles de détermination des dates optimales et de calculs des bilans subsistent rigoureusement dans le cas d'incertitude sur les coûts et sur les coefficients techniques des avantages. Elles sont très légèrement modifiées dans le cas d'incertitude sur les trafics, mais le déplacement de la date optimale de mise en service sera dans la quasi totalité des cas négligeables, et la modification des bilans n'aura de conséquences qu'assez rarement.

En somme, contrairement à ce qu'on aurait pu peut-être penser a priori, dans les incertitudes de cette nature, les méthodes usuelles gardent toute leur valeur.

Il ne faudrait pas déduire de cela que les études à but économique peuvent sans inconvénient être sommaires. Tout au contraire, le calcul des pertes économiques résultant de l'incertitude permet de déterminer un ordre de grandeur des crédits qu'il est nécessaire de leur consacrer pour réduire cette incertitude.

En effet, ces études ont pour principal effet de réduire les incertitudes diverses sur les coûts des trafics, etc.

A chaque niveau d'incertitude caractérisé par σ_u est associée une perte probable donnée par la formule (4) précédente :

(4) $$\bar{P} = \frac{(C_e - jt_o)^2}{2B} \sigma_u^2$$

Considérons le cas d'une opération de mise en service, pour laquelle le bénéfice par franc investi est de l'ordre de 1 franc :

Alors : $$\bar{P} = \frac{C}{2} \sigma_u^2$$

Pour un aménagement d'un type donné les trafics sont en général, en l'absence de toute étude, connus chacun à 30 % près ($\sigma_u = 0,17$) Si on limitait la recherche à ces estimations sommaires, la perte encourue serait de 1,5 % du coût. Une étude de trafic plus raffinée permettra de faire passer l'erreur de 30 % à 10 % (σ_u : 0,06), et la perte probable tombera à 0,1 % du coût. Il sera donc justifié de consacrer à cette étude de trafic un crédit allant jusqu'à :

$$1,5 - 0,1 = 1,4 \simeq 1,5 \%$$

du coût total de l'opération (mais si l'étude coûte ce prix, on n'aura rien gagné).

C'est ainsi que la détermination à 10 % près du trafic susceptible d'intéresser une déviation d'un coût de 5.000.000 F (exemple d'une déviation de ville moyenne) justifierait une dépense d'étude pouvant aller jusqu'à :

$$5.000.000 \times 0,015 = 75.000 \text{ F.}$$

Une somme probablement rarement atteinte.

Bien sûr, l'étude de trafic est nécessaire pour d'autres objectifs que l'étude de rentabilité proprement dite ; elle intéresse également la contexture technique du projet et, à ce titre, ce qui précède ne constitue par sa seule justification. Cette dernière considération renforce la conclusion précédente et pousse encore plus en faveur d'une extension des études de trafics.

On pourrait faire le même raisonnement sur l'intérêt d'estimer correctement les coûts de construction, mais là l'étude technique est nécessaire de toute façon, pour définir le travail à exécuter.

On voit que les incertitudes du type "erreur de mesure" n'ont que très peu d'influence sur les méthodes d'étude économique, qui subsistent pratiquement inchangées.

Examinons maintenant si ce résultat intéressant subsiste quand l'incertitude porte sur les prévisions de développement du trafic.

2) *A partir d'une certaine date il est possible que le trafic se stabilise et ne croisse plus.*

Soient τ la date à partir de laquelle le trafic est susceptible de se stabiliser, t_o la date de mise en service au cas où le trafic ne se stabiliserait pas, p la probabilité de stabilisation d'un trafic à partir de τ_o. alors on verrait facilement que : — Si $t_o < \tau_o$

Il faut mettre en service l'opération à la date t_o ; le bénéfice moyen qu'on peut en espérer est, en appelant B' le bénéfice qu'on en retirerait en l'absence de stabilisation du trafic, et en supposant que les avantages sont fonction linéaire du trafic (1ère approximation de lois plus complexes) :

$$E(B) = (1 - p)\ B' + pB'\ (1 - \exp - j(\tau - t_o)$$

ou :

$$E(B) = B'\ (1 - p \exp - j\ (\tau - t_o)$$

— Si $t_o > \tau$.

On ne mettra en service que si la stabilisation du trafic ne se produit pas ; l'espérance de bénéfice est :

$$E(B) = B'\ (1 - p).$$

Les écarts qui peuvent résulter de ce type d'incertitude sont très élevés.

En outre, cette situation n'a rien d'exceptionnel, au contraire elle affecte la quasi-totalité des bilans actualisés opérations, puisqu'on admet généralement qu'à partir d'une certaine date horizon, le trafic se stabilisera.

3) Le taux de croissance linéaire α du trafic est affecté d'un aléa dont on ne connaîtra la valeur précise qu'après que la décision soit prise

Soit u cet aléa, le trafic estimé à une époque t est :

$$\bar{T} = T_o \; (1 + \alpha t)$$

le trafic réel sera en fait :

$$T_t = T_o \left(1 + \alpha \; (1 + u) t\right)$$

mais on ne le connaît pas suffisamment à temps.

Ce cas n'est pas sans intérêt car bien souvent, on est obligé de prendre dès maintenant toute une série de décisions qui engagent un futur assez éloigné, et qu'on ne pourra que difficilement modifier ultérieurement, même si, au fur et à mesure que le futur inconnu se dévoile, cela apparaissait souhaitable.

C'est ainsi que, par exemple, entre le moment où l'on envisage de créer une autoroute et sa mise en service, il s'écoule pour les études et l'exécution des travaux, un délai difficilement compressible, qui peut atteindre facilement 7 ans.

On est alors dans une situation tout-à-fait analogue à celle qui règnait lors de l'incertitude du type "erreur de mesure" ; le traitement mathématique conduirait au résultat suivant : si les avantages ont une expression de la forme $a + b\,T_t + c\,T^2 + d\,T^3$,
il convient, pour la détermination de la date de mise en service et le calcul des bilans, de substituer à la formulation précédente des avantages, la relation :

$$a + b\bar{T}_t + cT_t^2 + d\bar{T}_t^3 + \sigma_u^2 \; (\bar{T}_t - T_o)^2 \quad (c + 3\bar{T}_t d)$$

on verrait aisément sur des cas concrets que l'incidence du terme correctif :

$$\sigma_u^2 \; (\bar{T}_t - \bar{T}_o)^2 \; (3 + 3\,\bar{T}_t d)$$

est en général faible, pour des valeurs vraisemblables de σ_u^2 (σ_u de l'ordre de 0,30 par exemple) et produit, en sens, les mêmes effets qu'une incertitude sur le trafic initial.

Les dates de mise en service ne seraient pas changées, et l'ordre des bilans de diverses solutions variantes ne pourrait être modifié que si ceux-ci se tiennent à 1 % ou 2 % près.

En pratique on pourra donc, dans la plupart des cas, négliger les effets de ce type d'incertitude.

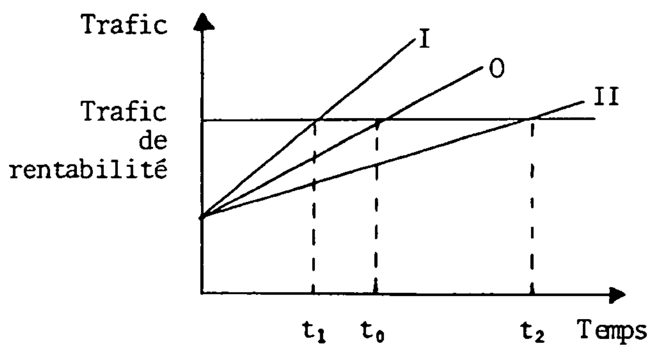
4) *Le taux de croissance linéaire α est affecté d'un aléa dont on ne connaîtra la valeur précise qu'à une certaine date future θ, à laquelle il sera encore possible de modifier les décisions ultérieures*

On se trouvera dans ce cas quand les opérations lointaines prévues à l'instant initial peuvent être modifiées dans leur nature et déplacées dans le temps, selon l'évolution future du trafic, et qu'on ne remet pas en cause l'hypothèse d'accroissement linéaire du trafic.

La situation est alors plus favorable que précédemment pour ces opérations éloignées, qui pourront être mieux ajustées à l'évolution du trafic.

Portons sur le diagramme de la figure 1 l'évolution du trafic en fonction du temps, selon chacune des 3 hypothèses :

- moyenne (hypothèse O) de probabilité : p ;
- haute (hypothèse I) de probabilité : $\frac{1 - p}{2}$;
- basse (hypothèse II) de probabilité : $\frac{1 - p}{2}$.



L'opération envisagée doit, pour le bien, être mise en service pour un certain niveau du trafic, dit "trafic de rentabilité". Ce niveau de trafic sera atteint en :

t_0 dans l'hypothèse moyenne O,

t_1 dans l'hypothèse haute I

t_2 dans l'hypothèse basse II.

La décision à prendre, et le bilan qu'on peut en espérer seront très différents selon la situation de θ, date à laquelle on saura dans quelle hypothèse on se trouve par rapport à t_0, t_1 et t_2

Si $\theta < t_1$, on pourra mettre en service l'opération à la date convenable (puisque l'on saura alors dans quelle hypothèse on se trouve):

t_0 dans l'hypothèse 0

t_1 dans l'hypothèse I

t_2 dans l'hypothèse II

et le bénéfice qu'on peut espérer de l'opération à l'instant actuel sera, en appelant B_i (t_1) le bénéfice issu d'une mise en service à la date t quand le trafic évolue selon l'hypothèse i :

$$E\ (B) = \frac{1-p}{2}\left[(B_I(t_1) + B_{II}\ (t_2)\right] + p\ B_O\ (t_0)$$

Si $\theta > t_2$, il faut évidemment faire l'investissement avant la date θ, bien qu'on ne sache pas alors dans quelle évolution de trafic on se trouve. On se trouve alors pour la détermination de la date optimale de mise en service, dans une situation analogue à celle du paragraphe, et l'on y a vu que la mise en service doit, sauf cas exceptionnel, être faite à une époque très voisine de t_0 ; prenons t_0 pour simplifier.

Le bilan qu'on peut alors espérer obtenir est :

$$E\ (B) = \frac{1-p}{2}\left[B_I\ (t_0) + B_{II}\ (t_0)\right] + pB\ (t_0)$$

Si $t_1 < \theta < t_0$, on doit attendre θ avant de trancher.

A l'époque θ on décidera :

- de réaliser l'opération immédiatement si on est dans l'hypothèse I ;
- de la réaliser à t_0 si l'on est dans l'hypothèse O ;
- de la réaliser à t_2 si l'on est dans l'hypothèse 2.

le bénéfice actualisé que l'on peut espérer à l'instant initial est donc alors :

$$E\ (B) = \frac{1-p}{2}\ B_I\ (\theta) + pB_O\ (t_0) + \frac{1-p}{2}\ B_{II}\ (t_2)$$

Enfin, si $t_0 < \theta < t_2$, la bonne tactique n'est pas évidente a priori. Il faudra soit réaliser l'opération en t_0, soit attendre θ avant de se décider avant l'ordre relatif des bilans que l'on peut espérer de chacune de ces deux options

$$\frac{1-p}{2}\left[B_I\ (t_0) + B_{II}\ (t_0)\right] + pB_O\ (t_0)$$

et :

$$\frac{1 - p}{2}\left[B_I\ (\theta) + pB_O\ (\theta)\right] + \frac{1 + p}{2} B_{II}\ (t_2)$$

Il est possible de développer le raisonnement dans le cas où les avantages sont fonction linéaire du trafic.

Soient α le taux de croissance linéaire du trafic dans l'hypothèse moyenne O.

— $\alpha(1 + \varepsilon)$ et $\alpha(1 - \varepsilon)$ les taux de croissance des hypothèses I et II respectivement ; on suppose en outre, comme toujours, qu'à partir d'une date éloignée τ le trafic se stabilise.

Alors : $t_1 = t_0\ (1 - \varepsilon)$; $t_2 = t_0\ (1 + \varepsilon)$,

et les calculs conduisent aux résultats décrits dans le tableau ci-contre.

Considérons par exemple le cas où :

$$p = \frac{1}{2}\ ;$$

$$t_0 = 10 \text{ ans}\ ;$$

$$\theta = 5 \text{ ans}\ ;$$

$$\varepsilon = 0{,}5,$$

on est alors dans la première des cinq situations possibles et le terme est de 5 % du bilan.

Retenons que, dans une situation de ce type, les opérations lointaines, celles dont la mise en service pourra être décidée en connaissance de cause, sont désavantagées par le calcul usuel ; il convient de majorer leur bénéfice d'un pourcentage, qui peut être calculé par les relations données dans le tableau ci-contre. Par ailleurs, pour les opérations dont la réalisation aurait lieu un peu avant la date où se déliera l'incertitude, il y aura intérêt à attendre cette date, afin de pouvoir se décider en connaissance de cause. Toutefois, les effets correspondants seront en général faibles, et on pourra sans inconvénient, les négliger tant que la valeur de ε, pourcentage d'incertitude sur le taux de croissance du trafic, ne dépasse pas, disons 2 %.

CONCLUSION -

Les exemples simples qui viennent d'être exposés conduisent, semble-t-il à plusieurs conclusions :

1 - La première, c'est que les incertitudes du type "erreur de mesure", celles qui portent sur le coût de réalisation sur le trafic initial, n'entraînent pas de modification sensible dans les règles de conduite

(année à laquelle l'évolution du trafic sera connue)	$t_1 = t_0(1 - \varepsilon)$	t_0	$t_0\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{2(p+1)}{1-p}}}\right)$	$t_2 = t_0(1 + \varepsilon)$	
Tactique à adopter	On connaîtra à temps l'évolution du trafic ; donc on met en service à $t_0(1 - \varepsilon)$ dans l'hypothèse I. t_0 dans l'hypothèse O $t_0(1 - \varepsilon)$ dans l'hypothèse II	On se décide l'époque ; alors on connaît l'évolution du trafic et on met en service à l'instant dans l'hypothèse I. t_0 dans l'hypothèse O ; $t_0(1 + \varepsilon)$ dans l'hypothèse II.	On se décide à l'instant ; alors on connaît l'évolution du trafic, et on met en service à l'instant dans l'hypothèse I et o, t_2 dans l'hypothèse II.	On met en service à l'instant t_0.	On met en service à l'instant t_0.
Bilan à attendre de cette tactique	$B_0(t_0)\left[1+(1-p)\frac{j^2 t\,\varepsilon^2}{2}\right]$	$B_0\,t_0\left[\frac{1+p}{2}j^2 t_0\varepsilon^2-\frac{1-p}{4}(\theta-t_1)^2\right]$	$B_0(t_0)\left[1+\frac{j^2}{4}(2(1+p)t\,\varepsilon^2-(1-p)(\theta-t_1)^2-2p(\theta-t_0)^2\right]$	$B_0(t_0)$	$B_0(t_0)$

habituelles, pourvu que les estimations soient sans biais. Dans cette dernière hypothèse, on est conduit à calculer les bénéfices, les dates de mise en service selon les formules usuelles.

Mais deux compléments doivent être apportés à ce résultat encourageant. Le premier c'est que, bien souvent, l'imprécision dans l'estimation des paramètres s'accompagne d'un biais, ce biais allant d'ailleurs dans le sens d'une majoration de la rentabilité des projets ; par nature - et par intérêt... - les ingénieurs sont habituellement trop optimistes sur le coût des ouvrages qu'ils projettent et sur les services à en attendre.

Le deuxième complément c'est que, si les règles à appliquer sont toujours les mêmes, leur efficacité est sensiblement diminuée. La perte résultant de l'incertitude, mesurée par l'écart entre la décision optimale (connue seulement après coup) et la décision réellement prise, croît comme le carré de l'incertitude sur les paramètres. Ce résultat est à lui seul une justification des études techniques à mener pour diminuer cette incertitude.

2 - La deuxième conclusion à tirer, c'est que les méthodes habituelles peuvent être largement erronées lorsque l'incertitude porte sur des éléments futurs. La situation à cet égard la plus significative parmi celles qui ont été présentées est celle de révélation progressive de la réalité, schématisée dans le cas n° 4 ; on voit apparaître deux résultats : le premier c'est que les opérations lointaines doivent être avantagées par rapport aux calculs usuels ; leur bénéfice doit être majoré d'une certaine quantité ; le deuxième, c'est que pour les opérations à réaliser un peu avant la date où se déliera l'incertitude, il peut être avantageux d'attendre cette date pour prendre la décision en parfaite connaissance de cause. Ces résultats pour fragmentaires qu'ils soient, conduisent à poser une hypothèse qui va à l'encontre des idées intuitives, et qui de ce fait, inciterait de plus amples confirmations : l'incertitude ne favorise pas les solutions progressives mais au contraire les solutions lourdes. Les solutions progressives en effet, si elles réservent l'avenir, conduisent en revanche à engager des dépenses et à prendre certains partis beaucoup plus tôt que les solutions lourdes, pour lesquelles la décision est prise avec davantage d'éléments. En somme, l'incertitude conduirait, non pas à suivre au plus près l'évolution, mais au contraire à attendre le plus longtemps que l'évolution ait eu le temps de se produire.

C'est plus une conjecture qu'un résultat démontré, mais ces analyses constituent un appel pour tester cette conjecture, qui ne devrait pas déplaire aux financiers.

3 - Enfin la troisième conclusion que l'on peut tirer de ce qui précède, c'est que l'incertitude ne constitue pas une difficulté insurmontable, et qu'il est assez facile de la prendre en compte dans les calculs de rentabilité. On peut aisément cerner les principaux éléments sur lesquels porte l'incertitude ; on peut également facilement modifier les formules classiques du calcul de rentabilité pour tenir compte de cette incertitude ; certes, on est alors obligé de faire intervenir des paramètres tels que la variance de la variable aléatoire en jeu ; et en général on ne connaît pas cette variance ; mais

les calculs sont assez simples pour qu'on puisse les effectuer avec plusieurs jeux de valeurs, et ensuite juger les résultats, compte tenu des valeurs vraisemblables des variances en cause.

Il faut donc espérer qu'un déblocage s'opère et que l'incertitude cesse d'être cette arlésienne du monde des études, dont tout le monde parle mais qu'on ne voit jamais, et dont l'absence permet souvent à juste titre aux décideurs de se montrer sceptiques sur la validité des résultats qui leur sont présentés.