

**Systèmes de Tinbergen-Bos.**  
**Métriques à deux industries avec flux de transports**

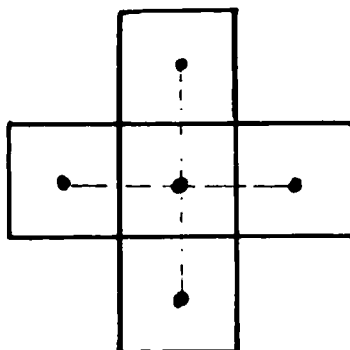
J.H. KUIPER, J.H.P. PAELINCK, K.E. ROSING  
Départements d'Économie Spatiale Théorique  
et de Géographie Économique  
Faculté des Sciences Économiques, Université Érasme de Rotterdam

1. INTRODUCTION

Les systèmes d'équilibre économique spatial de Tinbergen-Bos ont fait l'objet de nos études parues tout au long des dernières années (l'on trouvera une synthèse dans J. Paelinck, 1985) et continuent à faire partie d'un programme de recherches en économie spatiale théorique et en programmation mathématique à Rotterdam.

L'un des points au programme était l'introduction de métriques non discrètes qui avaient dominé les investigations; une première généralisation à une métrique  $p = 1$  (distance de Manhattan) sur des "cercles de Manhattan" de rayons 1, 2 et 3 (un cercle de rayon 1 est reproduit à la figure 1) a été publiée par les auteurs en 1990 (Kuiper, Paelinck et Rosing, 1990).

Figure 1: cercle de Manhattan de rayon 1



Les localisations des productions non agricoles ont lieu sur l'intersection des branches orthogonales du réseau de transport, la production agricole (d'indice 0) étant dispersée de façon homogène sur l'espace considéré.

Jusqu'à présent seulement 1 type d'industrie avait été considéré; l'on généralisera maintenant l'étude au cas de deux industries.

## 2. SYSTEME

La figure A ci-après (extraite de Paelinck, 1985, p. 56) visualise les relations de Tinbergen-Bos dans le cas de deux industries.

Par rapport à cette approche (que détaille Paelinck, 1985, pp. 52 à 66, cette dernière page reprenant des éléments du programme de recherches actuellement en cours d'exécution: introduction de métriques non-discrètes et calcul explicite des localisations des activités non agricoles) un certain nombre de spécifications ont été introduites:

- (a) l'on a provisoirement négligé les livraisons intermédiaires (cette généralisation antérieure sera réintroduite plus tard);
- (b) les "centres" de Tinbergen-Bos (définis comme des regroupements spatiaux d'activités non agricoles) ne comprenaient qu'une seule activité du rang le plus élevé (activité dont le nombre d'unités

de production est minimal par rapport aux autres activités présentes); ici nous n'imposerons aucune contrainte sur la composition des centres.

### 3. EQUATIONS

Définissons:

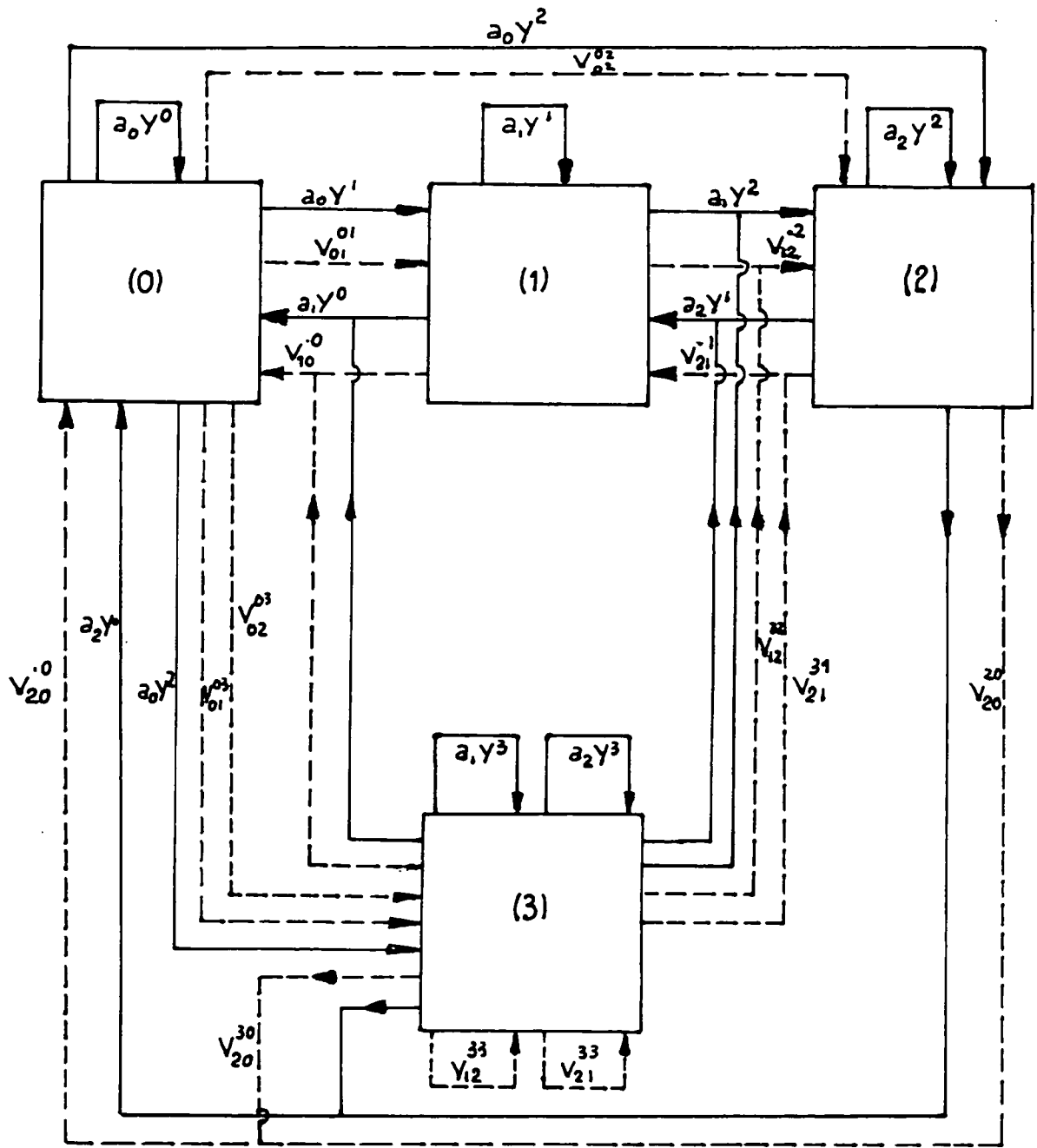
$$y_i^1 = \text{entier},$$

la présence ou absence de l'industrie 1 au lieu i (variable binaire);

$$y_i^2 = \text{entier},$$

la présence ou absence de l'industrie 2 au lieu i (variable également binaire);

Figure A : Visualisation d'un système de Tinbergen-Bos à 2 industries



— flux finals  
 - - - flux intermédiaires

$$x_{ij}^1 \geq 0 \quad (3.2.a)$$

les échanges éventuels entre l'industrie 1 et les agriculteurs, localisés en i et j;

$$x_{ij}^2 \geq 0 \quad (3.2.b)$$

les échanges éventuels entre l'industrie 2 et les agriculteurs, localisés en i et j;

$$x_{ij}^3 \geq 0 \quad (3.2.c)$$

les échanges éventuels entre les industries 1 et 2, localisées en i et j.

Notons que le nombre de sites potentiels (d'indices i et j) est de  $n^*$  (5 par exemple, dans le cas de la figure 1), le nombre d'unités de l'industrie une  $n_1^* \leq n^*$ , de l'industrie deux  $n_2^* < n_1^*$ .

Les contraintes suivantes caractérisent le système:

$$\sum_j x_{ij}^1 = y_i^1 n^* n_1^{*-1} \quad \forall i \quad (3.3.a)$$

$$\sum_i x_{ij}^1 = 1 \quad \forall j \quad (3.3.b)$$

$$\sum_i y_i^1 = n_1^* \quad (3.3.c)$$

$$\sum_j x_{ij}^2 = y_i^2 n_1^{*} n_2^{*-1} \quad \forall i \quad (3.4.a)$$

$$\sum_i x_{ij}^2 = 1 \quad \forall j \quad (3.4.b)$$

$$\sum_i y_i^2 = n_2^{*} \quad (3.4.c)$$

$$\sum_j x_{ij}^3 = y_i^2 n_1^{*} n_2^{*-1} \quad \forall i \quad (3.5.a)$$

$$\sum_i x_{ij}^3 = y_j^1 \quad \forall j \quad (3.5.b)$$

La fonction objective à minimiser est:

$$\psi = \sum_{i=1}^{n^*} \sum_{j=1}^{n^*} \sum_{k=1}^3 w_k t_k d_{ij} x_{ij}^k \quad (3.6)$$

où  $d_{ij}$  est la distance entre les noeuds  $i$  et  $j$ , et où  $t_1$ , le coût unitaire de transport entre activités 0 et 1, par exemple, est exprimable comme:

$$t_1 = \frac{\tau_0 \alpha_0 y_1^* / n_1^* + \tau_1 \alpha_1 y_0^* / n_1^*}{\alpha_0 y_1^* / n_1^* + \alpha_1 y_0^* / n_1^*} \quad (3.7.a)^{1)}$$

$$= \frac{(\tau_0 \alpha_0 \alpha_1 + \tau_1 \alpha_1 \alpha_0) y^*}{(\alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_0) y^*} \quad (3.7.b)$$

$$= (\tau_0 + \tau_1) \quad (3.7.c)$$

$\tau_0$  et  $\tau_1$  étant les coûts de transports unitaires sur les produits 0 et 1. Il en est de même pour  $t_2$  et  $t_3$ ; l'on peut donc facilement étudier l'impact de modulations dans les  $t_k$  sur la formation des systèmes (définis comme des combinaisons de types de "centres").

Quant aux  $w_k$ , ils sont définis comme:

$$w_1 \triangleq \alpha_0 \alpha_1 n^{*-1} \quad (3.8.a)$$

$$w_2 \triangleq \alpha_0 \alpha_2 n^{*-1} \quad (3.8.b)$$

$$w_3 \triangleq \alpha_1 \alpha_2 n_1^{*-1} \quad (3.8.c)$$

et font donc intervenir les propensions à consommer qui influenceront les flux de transport; des modulations sur  $w_k$  sont donc également de mise.

-----  
1) Les  $y_0^*$ ,  $y_1^*$  et  $y_2^*$  sont respectivement les produits (ou revenus) agricoles et ceux des industries 1 et 2, en fait exogènes; leur somme est égale à  $y^*$ .  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont les propensions (marginales et moyennes) à consommer les produits 0 et 1.

#### 4. RESULTATS

##### 4.1. Reformulation du programme mathématique

Afin de résoudre le problème posé, il fut reformulé comme un problème p-médian capacité modifié; (pour les détails l'on se référera à Kuiper, Paelinck et Rosing (1990), où ce cadre de localisation-allocation fut utilisé pour l'étude de systèmes Tinbergen-Bos à une industrie). Dans le cas de plusieurs industries, cependant, des relations antérieurement implicites et non-spécifiées devraient maintenant être contraintes; la nouvelle spécification à deux industries (aisément généralisable à K industries) est la suivante:

$$\min \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 x_{ijk} a_k w_k (|c_{1i} - c_{1j}| + |c_{2i} - c_{2j}|) \quad (4.1)$$

sujet à

$$\sum_{i=1}^n x_{ijk} = 1 \quad \forall j, k=1,2 \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{jk} = p_k \quad \forall k=1,2 \quad (4.3)$$

$$y_{jk} - x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i,j, k=1,2 \quad (4.4)$$

$$s_k y_{jk} - \sum_{i=1}^n x_{ijk} a_k - \sum_{i=1}^n x_{ijk} b_k \geq 0 \quad \forall j, k=1,2 \quad (4.5)$$



$$y_{jk} - \sum_{i=1}^n x_{jik} \geq 0 \quad \forall j, k=1,2 \quad (4.6)$$

$$y_{jk} - x_{ij3} \geq 0 \quad \forall i,j \quad (4.7)$$

$$y_{jk} - x_{ij4} \geq 0 \quad \forall i,j \quad (4.8)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=3}^4 x_{ijk} = p_1 + p_2 \quad (4.9)$$

$$y_{jk} = \text{entier} \quad \forall j, k=1,2 \quad (4.10)$$

où:

$n$  est le nombre d'unités de base dans un cercle rectangulaire particulier;

$i, j$  sont les indices des unités, de 1 à  $n$ ;

$k$  est l'indice des industries ( $k=1,2$ ) et de l'échange entre industries ( $k=3$  - industrie 1 vers 2 - et  $k=4$  - industrie 2 vers 1);

$a_1$  est le coût de fourniture de l'activité 0 par l'industrie 1 et de l'industrie 1 par l'activité 0;

$a_2$  est le coût de fourniture de l'activité 0 par l'industrie 2 et de l'industrie 2 par l'activité 0;

$a_3$  est le coût de fourniture de l'industrie 2 par l'industrie 1;

$a_4$  est le coût de fourniture de l'industrie 1 par l'industrie 2;

- $p_k$  est le nombre d'établissements de chaque sorte d'industrie;
- $s_k$  est la contrainte d'offre sur chaque établissement industriel:  
 $s_1 = (n + b_2 p_2)/p_1$  et, inversement:  $s_2 = (n + b_1 p_1)/p_2$ ;
- $x_{ijk}$  est une variable d'allocation indiquant la proportion d'aire ou d'industrie fournie par l'établissement industriel de type  $k$  localisé en  $j$ ;
- $y_{jk}$  est ici une variable de décision entière, zéro si aucun établissement industriel de type  $k$  n'est localisé en  $j$ , ou un entier indiquant combien d'établissements de type  $k$  sont localisés en  $j$ .

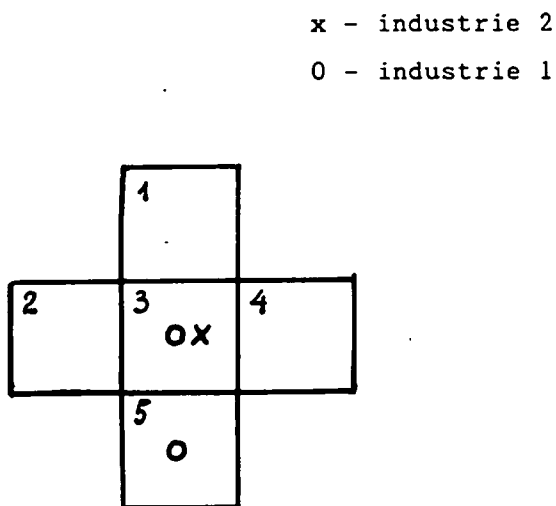
La fonction objective (4.1) minimise la somme pondérée des flux entre toutes les industries; les contraintes (4.2)-(4.4) sont des contraintes normales du  $p$ -médian, avec la remarque que dans (4.3) chaque industrie a un nombre différent d'établissements. La contrainte (4.5) porte sur l'offre disponible d'un établissement donné ( $j$ , de type  $k$ ); la contrainte de Kuiper-Paelinck-Rosing (1990) a été modifiée pour indiquer les liaisons "interindustrielles", et les contraintes (4.7)-(4.8) complètent (4.5) pour imposer la contrainte d'offre à tout établissement d'un certain type. De même (4.6) opère conjointement avec (4.7) - (4.8) mais du côté de la demande, assurant la satisfaction complète de celle-ci; (4.5) et (4.6) sont en fait les équations d'équilibre comptable de Tinbergen-Bos. Finalement (4.9) traduit l'exigence d'un nombre entier d'établissements à chaque endroit pertinent.

#### 4.2. Quelques résultats de calcul

Nous présenterons ci-après quelques solutions optimales pour des pondérations unitaires. Les premières solutions - pour un cercle de Manhattan de rayon 1 - montrent les localisations optimales ainsi que les quantités optimales transportées de chaque bien industriel. Il est

à remarquer que les demandes par activités n'ont pas été considérées comme égales à ce stade. Six exemples sont présentés: 1 firme de l'industrie 2 combinée avec 2, 3 et 4 firmes de l'industrie 1; 2 firmes de l'industrie 2 combinées avec 3 et 4 firmes de l'industrie 1; finalement 3 firmes de l'industrie 2 combinées avec 4 firmes de l'industrie 1.

Figure 2: 1 firme de l'industrie 2 et 2 firmes de l'industrie 1.



Flux optimaux entre centres:

industrie 2 vers l'agriculture: le centre 3 exporte le produit 2 vers le centre

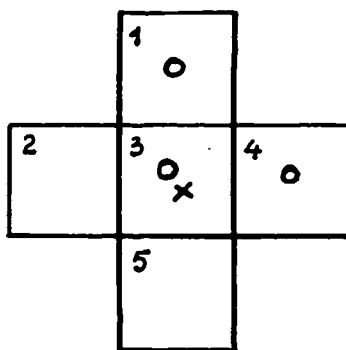
1	capacité:	1
2		1
3		1
4		1
5		1

industrie 1 vers l'agriculture: le centre 3 exporte le produit 1 vers le centre

1	capacité:	1
2		1

	3	$\frac{1}{4}$
le centre 5 exporte le produit 1 vers le centre		
	3	capacité $\frac{3}{4}$
	4	1
	5	1
industrie 2 vers l'industrie 1: le centre 3 exporte le produit 2 vers le centre	3	capacité $\frac{1}{2}$
	5	$\frac{1}{2}$
industrie 1 vers l'industrie 2: le centre 3 exporte le produit 1 vers le centre	3	capacité $\frac{1}{2}$

Figure 3: 1 firme de l'industrie 2 et 3 firmes de l'industrie 1:



Flux optimaux entre centres:

industrie 2 vers l'agriculture: le centre 3 exporte le produit 2 vers le centre	1	capacité	1
	2		1
	3		1
	4		1
	5		1

industrie 1 vers l'agriculture: le centre 1 exporte le produit 1 vers le centre

1	capacité	1
3		2/3
5		1/6

le centre 3 exporte le produit 1 vers le centre

2	capacité	1
3		1/3

le centre 4 exporte le produit 1 vers le centre

4	capacité	1
5		5/6

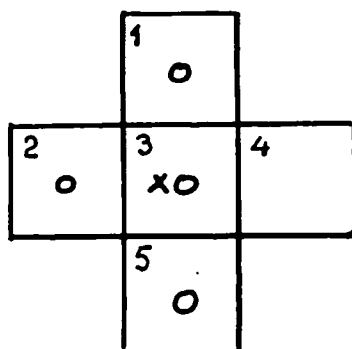
industrie 2 vers l'industrie 1: le centre 3 exporte le produit 2 vers le centre

1	capacité	$\frac{1}{2}$
3		$\frac{1}{2}$
4		$\frac{1}{2}$

industrie 1 vers l'industrie 2: le centre 3 exporte le produit 1 vers le centre

3	capacité	$\frac{1}{2}$
---	----------	---------------

Figure 4: 1 firme de l'industrie 2 et 4 firmes de l'industrie 1.



Flux optimaux entre centres:

industrie 2 vers l'agriculture: le centre 3 exporte le produit 2 vers le centre

1	capacité	1
2		1
3		1
4		1
5		1

industrie 1 vers l'agriculture: le centre 1 exporte le produit 1 vers le centre

1	capacité	1
3		3/8

le centre 2 exporte le produit 1 vers le centre

2	capacité	1
3		1/4
4		1/8

le centre 3 exporte le produit 1 vers le centre

4	capacité	7/8
---	----------	-----

le centre 5 exporte le produit 1 vers le centre

3		3/8
---	--	-----

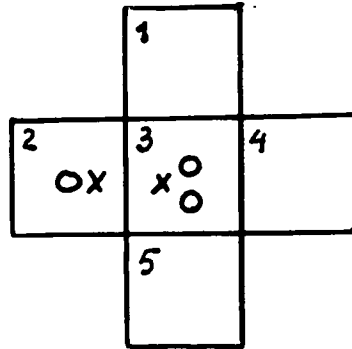
industrie 2 vers l'industrie 1: le centre 3 exporte le produit 2 vers le centre

1	capacité	$\frac{1}{2}$
2		$\frac{1}{2}$
3		$\frac{1}{2}$
4		$\frac{1}{2}$

industrie 1 vers l'industrie 2: le centre 3 exporte le produit 1 vers le centre

3	capacité	$\frac{1}{2}$
---	----------	---------------

Figure 5: 2 firmes de l'industrie 2 et 3 firmes de l'industrie 1.



Flux optimaux entre centres:

industrie 2 vers l'agriculture: le centre 2 exporte le produit 2 vers le centre

1	capacité	1
2		1
5		1/4

le centre 3 exporte le produit 2 vers le centre

3	capacité	1
4		1
5		3/4

industrie 1 vers l'agriculture: le centre 2 exporte le produit 1 vers le centre

2	capacité	1
---	----------	---

le centre 3 exporte le produit 1 vers le centre

1	capacité	1
3		1
4		1
5		1

industrie 2 vers l'industrie 1: le centre 2 exporte le produit 2 vers le centre

2	capacité	$\frac{1}{2}$
3		$\frac{1}{2}$





le centre 2 exporte le produit 1 vers le centre  
2 capacité 1

le centre 4 exporte le produit 1 vers le centre  
4 capacité 1  
3  $\frac{1}{2}$

le centre 5 exporte le produit 1 vers le centre  
3 capacité  $\frac{1}{2}$   
5 1

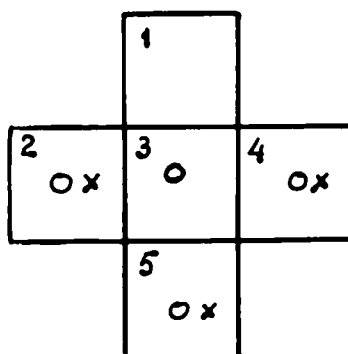
industrie 2 vers l'industrie 1: le centre 1 exporte le produit 2 vers  
le centre 1 capacité  $\frac{1}{2}$   
4  $\frac{1}{2}$

le centre 2 exporte le produit 2 vers le centre  
2 capacité  $\frac{1}{2}$   
5  $\frac{1}{2}$

industrie 1 vers l'industrie 2: le centre 1 exporte le produit 1 vers  
le centre 1 capacité  $\frac{1}{2}$

le centre 2 exporte le produit 1 vers le centre  
2 capacité  $\frac{1}{2}$

Figure 7: 3 firmes de l'industrie 2 et 4 firmes de l'industrie 1.



Flux optimaux entre centres:

industrie 2 vers l'agriculture: le centre 2 exporte le produit 2 vers le centre

2 capacité 1

3 1/3

le centre 4 exporte le produit 2 vers le centre

1 capacité 1/6

3 2/3

4 1

le centre 5 exporte le produit 2 vers le centre

1 capacité 5/6

5 1

industrie 1 vers l'agriculture: le centre 2 exporte le produit 1 vers le centre

1 capacité 1/8

2 1

le centre 3 exporte le produit 1 vers le centre

1 capacité 5/8

3 1

le centre 4 exporte le produit 1 vers le centre

1 capacité 1/8

4 1

le centre 5 exporte le produit 1 vers le centre

1 capacité 1/8

5 1

industrie 2 vers l'industrie 1: le centre 2 exporte le produit 2 vers le centre

2 capacité  $\frac{1}{2}$

3  $\frac{1}{2}$

le centre 4 exporte le produit 2 vers le centre

4 capacité  $\frac{1}{2}$

le centre 5 exporte le produit 2 vers le centre

5  $\frac{1}{2}$

industrie 1 vers l'industrie 2: le centre 2 exporte le produit 1 vers le centre

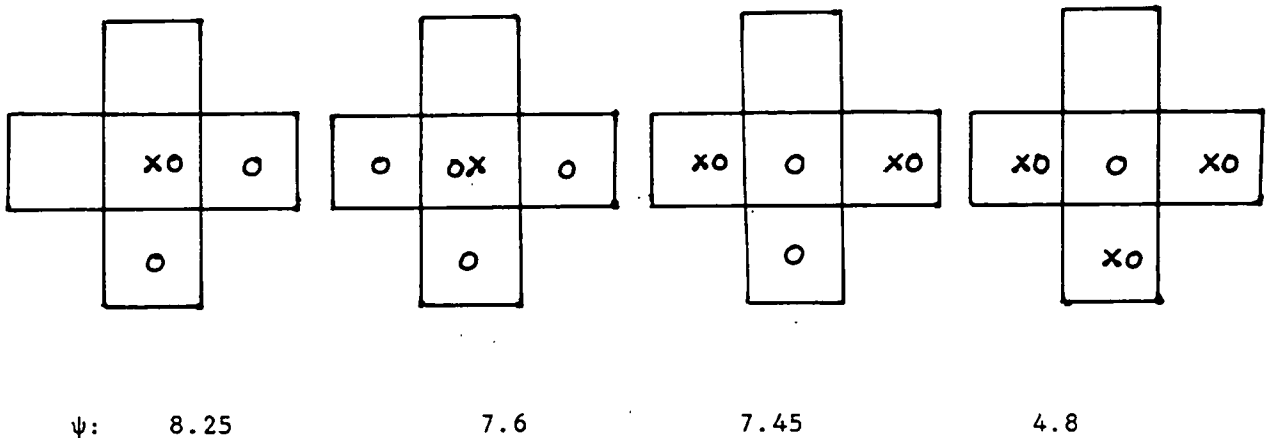
2 capacité  $\frac{1}{2}$

le centre 4 exporte le produit 1 vers le centre  
 4 capacité  $\frac{1}{2}$

le centre 5 exporte le produit 1 vers le centre  
 5  $\frac{1}{2}$

La figure 8 ci-après reprend quatre des cas précédents avec les valeurs de leurs fonctions objectives  $\psi$  (3.6) ou (4.1):

Figure 8



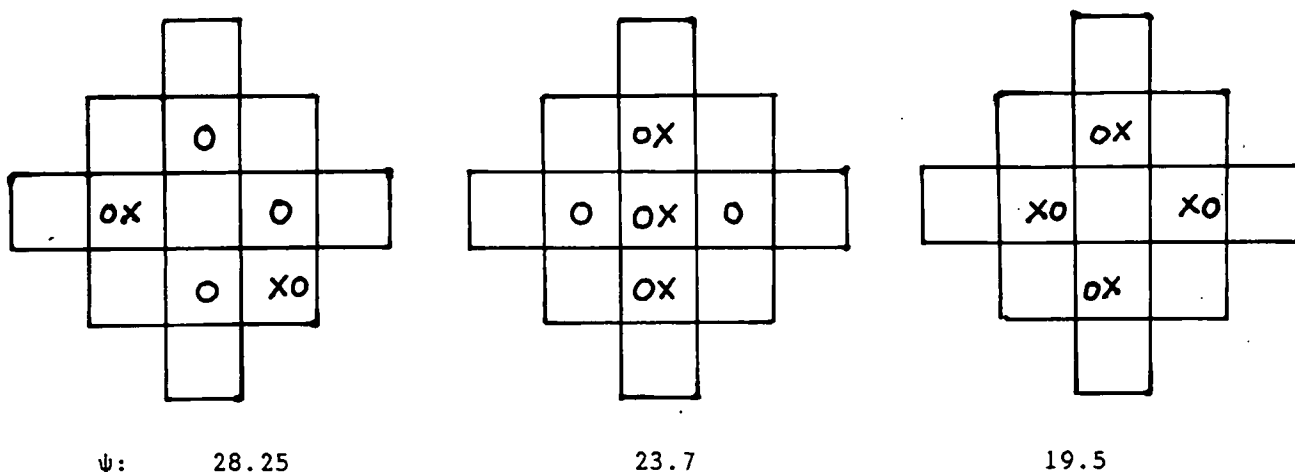
Avec prudence - car les résultats sont encore très incomplets - on peut avancer les faits suivants:

- s'il y a un établissement d'un secteur déterminé, cet établissement se localise au centre du cercle de Manhattan;
- si le nombre d'établissements d'un secteur augmente, ces établissements tendent à se disperser sur le cercle;
- pareil augmentation dans tous les secteurs réduira les coûts de transport totaux, mais si elle n'a lieu que dans un secteur elle peut mener à l'augmentation de ces coûts;
- les établissements d'un secteur de rang supérieur ne se localisent jamais seuls, mais en combinaison avec des établissements de rang

inférieurs; dans le cas de deux secteurs, un établissement du secteur 2 se trouvera toujours en compagnie d'un établissement du secteur 1.

L'exercice s'est poursuivi sur des cercles de Manhattan de rayon 2; la figure 9 en donne certains exemples

Figure 9



Les travaux se poursuivent, et l'on espère bientôt être en possession d'une systématique à plusieurs secteurs.

## 5. CONCLUSIONS

Dans Kuiper, Paelinck et Rosing (1990), des cercles de Manhattan furent introduits et un programme mathématique fut résolu, montrant comment le secteur industriel se localisait sur des cercles de rayon différent. Pour chaque cas, un schéma de localisation optimal, et pour chaque firme localisée, l'aire de marché optimale fut déduite. Ces solutions optimales montrent que des firmes tendent à se disperser sur le cercle.

L'une des conclusions était la nécessité d'une extension stratégique portant sur le nombre de secteurs industriels; dans la présente

étude des systèmes Tinbergen-Bos à deux industries ont été fait l'objet d'investigation, avec le programme mathématique et quelques premiers résultats de calculs; plus haut l'on a présenté certains commentaires. Quelques intéressants que soient les résultats obtenues, il convient d'étudier davantage d'exemples, en particulier en modulant les coefficients  $w_k$  et  $t_k$ ; ce programme est actuellement en cours d'exécution.

#### 6. REFERENCES

Kuiper, J.H., Paelinck, J.H.P. and Rosing, K.E., Transport Flows in Tinbergen-Bos Systems, in K. Peschel (ed.), Infrastructure and the Space-Economy, Springer-Verlag, Heidelberg-Bonn, 1990, pp. 29-52.

Paelinck, J.H.P., Eléments d'Analyse Economique Spatiale, ERESA, Genève et Economica, Paris, 1985.