

## UN ALGORITHME POUR RESOUDRE PLUSIEURS MODELES D'AFFECTION DU TRAFIC : LA PROCEDURE D'EGALISATION PAR TRANSVASEMENT

FABIEN M. LEURENT

DEST-INRETS

### INTRODUCTION

#### *QUELQUES DEFINITIONS*

Un modèle d'affectation du trafic routier simule le choix d'itinéraire opéré par un conducteur automobile sur un réseau routier, en fonction des caractères du conducteur et du réseau. Il sert à simuler la réaction des conducteurs (= la demande) face à une modification du réseau (= l'offre), par exemple la mise en place d'une nouvelle route, ou une restriction locale de capacité, ou l'instauration d'un péage sur une route, ou la fourniture d'information au conducteur.

Parmi les caractères du réseau qui importent pour les conducteurs, le temps de parcours joue un rôle primordial, analogue au prix d'un bien sur un marché économique : il faut donc le représenter finement dans le modèle, et notamment prendre en compte les phénomènes de congestion. La prise en compte minimale consiste à relier le temps de parcours d'une route au débit qu'elle écoule, à l'aide d'une fonction de temps de parcours.

Dans un modèle où le temps de parcours dépend du débit, l'équilibre entre offre et demande se calcule par approximations successives, à l'aide d'un algorithme itératif appelé algorithme d'équilibrage.

Lorsque la circulation sur le réseau s'effectue dans des conditions approximativement stationnaires, on peut appliquer un modèle d'affectation statique (= sans écoulement du temps) à la période de stationnarité, par exemple l'heure de pointe du soir sur un réseau urbain. Nous ne

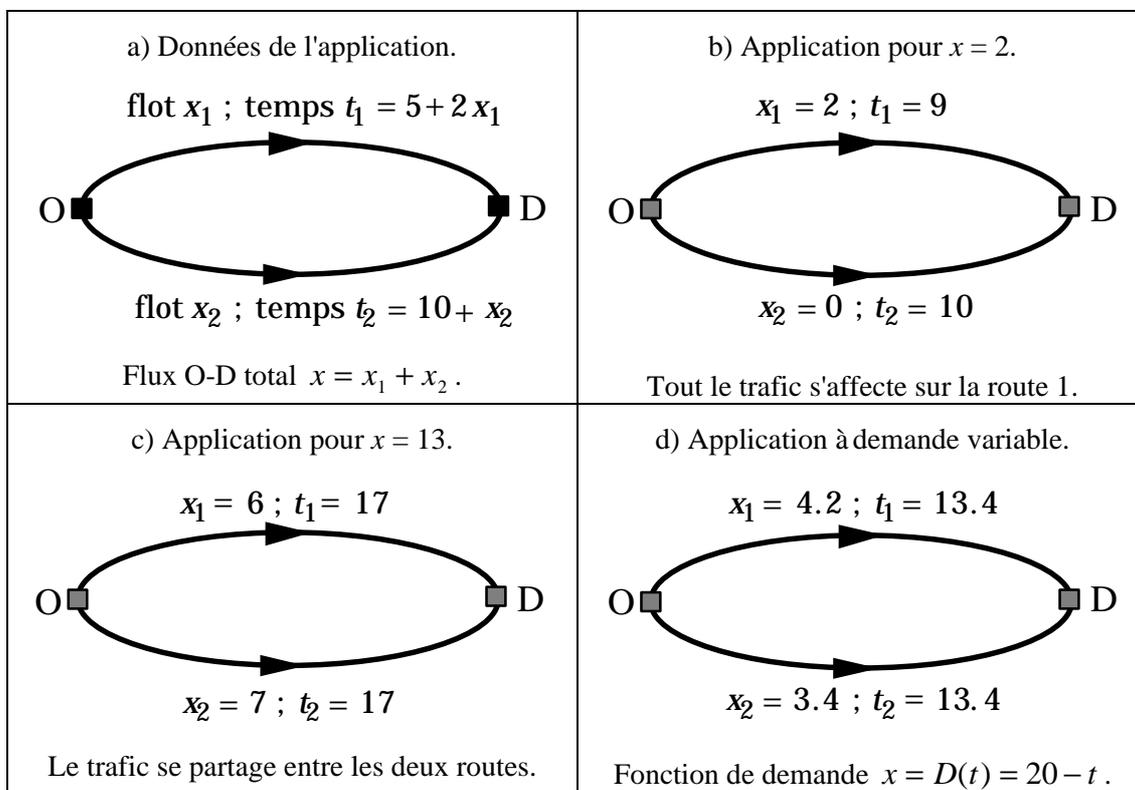
considérons pas ici l'affectation dynamique qui explicite l'écoulement du temps : elle étend l'affectation statique, mais cela n'a pas de rapport direct avec notre propos qui est de calculer un équilibre entre offre et demande de transport.

#### EXEMPLES DE MODELES D'AFFECTION

Parmi les modèles d'affectation statique du trafic routier, la référence classique est le modèle déterministe homogène de WARDROP-BECKMANN, dans lequel le temps de parcours dépend du débit et les conducteurs ont une information et une rationalité totales. Dans ces conditions seuls les chemins de temps minimum peuvent être chargés, donc à l'équilibre les temps de parcours des chemins utilisés sont égaux et minimaux. On peut supposer l'élasticité de la demande, i.e. que le flux d'une relation origine-destination (O-D) dépend du niveau de service mesuré (au signe près) par le temps minimum.

La Figure 1 expose les résultats du modèle déterministe homogène, appliqué à une relation O-D avec deux routes en concurrence (Figure 1a) pour deux valeurs fixées du flux (Figure 1b et Figure 1c) puis pour une demande élastique (Figure 1d).

Figure 1 : Résultats du modèle déterministe homogène



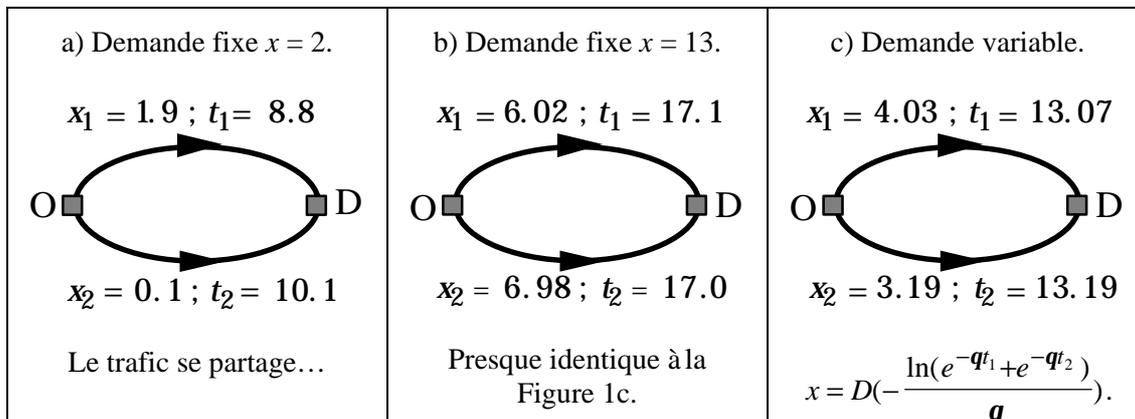
D'autres facteurs que le temps influencent le choix d'itinéraire : distance, péages autoroutiers, confort routier, sécurité, fiabilité... Une première solution technique, dans le modèle déterministe homogène, est de considérer que les conducteurs minimisent non pas le seul temps de parcours, mais un temps généralisé qui englobe les autres facteurs après conversion en unité de temps ; ainsi on divise les frais de péage par la valeur du temps, somme qu'un individu accepte de payer pour économiser une unité de temps.

Mais certains facteurs sont malaisés à mesurer ou à convertir : une deuxième solution, complémentaire de la première, est d'ajouter au temps généralisé un terme aléatoire dont on fixe

la distribution statistique afin de reproduire des répartitions du trafic entre itinéraires concurrents observées. On obtient alors un modèle stochastique. Le modèle stochastique le plus simple est le logit linéaire, qui stipule que le rapport des trafics de deux itinéraires concurrents est égal au rapport de fonctions exponentielles négatives appliquées aux temps généralisés respectifs : soit  $x_1 / x_2 = \exp(-q t_1) / \exp(-q t_2)$ .

La Figure 2 présente ce modèle pour l'exemple de la Figure 1, avec  $q = 2$ .

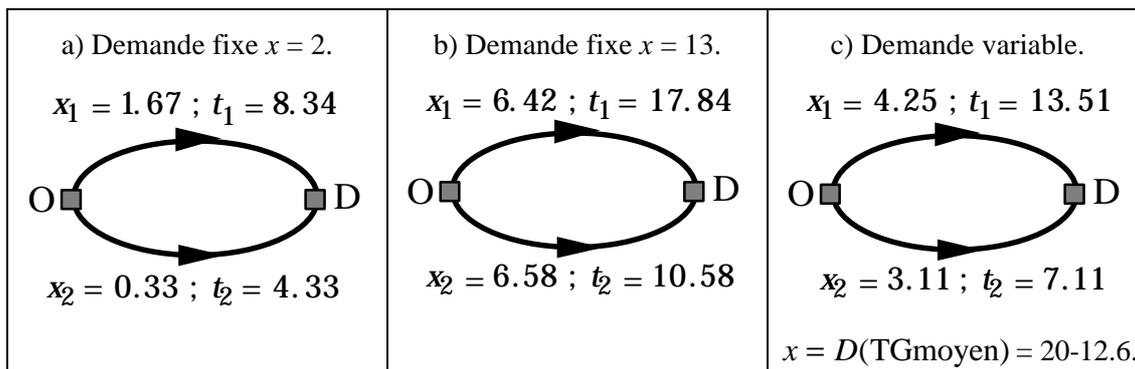
Figure 2 : Démonstration du modèle logit linéaire



Une troisième solution, compatible avec les deux premières mais le plus souvent employée seulement avec la première, est d'expliciter différents comportements au sein de la demande, en supposant que les coefficients d'équivalence entre les facteurs du temps généralisé varient parmi les conducteurs. On obtient un modèle prix-temps (bicritère) lorsque l'on suppose que c'est la valeur du temps qui est continûment distribuée parmi les demandeurs.

Reprenons l'exemple de la Figure 1 en l'adaptant au cas prix-temps. On suppose maintenant que sur la seconde route la fonction de temps de parcours est  $t_2 = 4 + x_2$ , avec un péage de 360 : si l'on considère une valeur du temps unique de 60, alors le temps généralisé de la seconde route vaut  $tg_2 = 4 + x_2 + 360/60$  ce qui revient au cas de la Figure 1. Mais nous supposons désormais que la valeur du temps suit une loi log-normale de moyenne 60 et telle que son logarithme naturel a un écart-type de 0.6.

Figure 3 : Démonstration du modèle prix-temps



## OBJECTIF DE LA RECHERCHE

Cet article ne vise pas à comparer plusieurs modèles d'affectation, bien que les résultats des exemples poussent en ce sens ! Son objectif est de présenter une méthode de calcul, un algorithme d'équilibrage, valable pour les différents modèles examinés. Cette question technique est nécessaire à toute application, donc préalable à toute confrontation des modèles.

Nous avons développé un algorithme particulier, la Procédure d'Egalisation par Transvasement (PET) proposée par GIBERT (1968) puis d'autres, pour traiter le modèle déterministe homogène ; nous avons étendu la PET aux cas de la demande élastique, du logit linéaire et du modèle prix-temps. La PET se distingue des algorithmes d'équilibrage classiques (tels que la méthode de FRANK-WOLFE implantée dans Emme/2 et Min UTP, ou la décomposition simpliciale programmée dans DAVIS et SATURN) en ce qu'elle explicite les chemins suivis : chose que bien des praticiens jugent encore impossible, alors que la constante progression des ressources informatiques permet maintenant de traiter des applications de taille moyenne (quelques milliers d'arcs) sur un micro-ordinateur compatible IBM-PC.

## QUESTIONS DE METHODE

Du côté de la méthode, nous avons d'abord vérifié l'intérêt pratique de la PET en la comparant aux algorithmes usuels dans une application opérationnelle de taille moyenne (140 zones de demande, réseau de 2000 arcs). Puis (LEURENT, 1995a) nous avons étendu sa portée théorique à des modèles qui sophistiquent la représentation de la demande : à savoir à demande élastique, ou avec une perception aléatoire du temps de parcours (logit linéaire), ou avec des arbitrages différenciés entre deux critères de coût (modèle prix-temps à valeur du temps distribuée continûment). Ces diverses extensions relèvent d'un même principe théorique, à savoir la possibilité de caractériser mathématiquement le point d'équilibre du modèle comme la solution d'un programme de minimisation convexe.

La suite de l'article se compose de trois parties principales suivies d'une conclusion. La première partie expose le fondement de la PET et la mise en oeuvre prescrite par SCHITTENHELM (1990). La deuxième partie traite des extensions théoriques. La troisième partie relate des expériences numériques.

Trois appendices apportent respectivement : la preuve du principe d'extension, un formulaire pour des distributions triangulaires des valeurs du temps et un formulaire pour des distributions log-normales des valeurs du temps.

## 1. FONDEMENT ET MISE EN OEUVRE DE LA PROCEDURE D'EGALISATION PAR TRANSVASEMENT

### 1.1. LE PRINCIPE DE BASE

Soit un réseau de transport composé d'un ensemble de noeuds (= sommets) et d'un ensemble d'arcs  $a$ . Généralement, entre un sommet d'origine  $r$  et un sommet de destination  $s$ , plusieurs chemins  $k$  sont susceptibles d'acheminer un déplacement. Selon le principe de WARDROP, un chemin  $k$  de temps de parcours  $T_{rs}^k$  n'est utilisé que si  $T_{rs}^k$  est minimal, parmi ceux des chemins envisageables. Un temps de parcours  $T_{rs}^k$  est la somme des temps de parcours  $T_a$  des arcs  $a$  traversés par le chemin  $k$  :

$$T_{rs}^k = \sum_{a \in k} T_a = \sum_a \mathbf{d}_{rs}^{ak} T_a, \text{ avec } \mathbf{d}_{rs}^{ak} = 1 \text{ si } a \in k \text{ ou } 0 \text{ sinon.}$$

Pour préciser le modèle à ce stade, il faut répondre à deux questions :

- comment identifier les chemins  $k$  ?

- si un temps  $T_a$  varie en fonction du débit local  $x_a$ , selon  $T_a = t_a(x_a)$  où  $t_a$  est une fonction continue croissante, comment répartir le trafic  $q_{rs}$  de la relation origine-destination  $r$ - $s$  de manière à satisfaire le principe de Wardrop, à savoir l'affectation à un chemin de temps minimal ?

On répond usuellement à la première question en effectuant une recherche de plus court chemin, qui livre un chemin  $k$  de temps minimal entre  $r$  et  $s$  : quand une telle recherche ne fait pas apparaître de nouveau chemin, alors forcément les chemins de temps minimum déjà identifiés suffisent.

A la seconde question, entre autres solutions ((PATRIKSSON, 1994) pour un très large panorama, ou (LEURENT, 1995b) pour quelques aperçus), le principe d'égalisation constitue une réponse. Si l'on a identifié les chemins disponibles, soit tous les chemins utilisés sont de même coût et il n'existe pas de chemin non-utilisé de coût inférieur, auquel cas l'objectif est atteint, soit il y a un chemin utilisé de coût supérieur à celui d'un autre chemin. Alors le principe d'égalisation consiste à détourner, transférer du flux depuis le chemin chargé vers le chemin de coût minimal, jusqu'à ce qu'il y ait égalisation du temps de parcours entre les deux chemins, ou qu'il n'y ait plus de flux affecté au chemin le plus long. En itérant une telle confrontation deux-à-deux des chemins, on parvient (par transitivité) à minimiser et égaliser les temps de parcours des chemins utilisés entre l'origine et la destination.

### 1.2. LA MISE EN OEUVRE SOULEVE TROIS QUESTIONS ; LES REponses DE SCHITTENHELM

La mise en oeuvre du principe d'égalisation nécessite de répondre à trois questions :

- comment, à quel moment, sélectionner les chemins candidats à l'égalisation (ces chemins sont ensuite stockés) ?

- comment traiter plusieurs relations origine-destination ?

- peut-on se contenter d'une égalisation approximative ?

SCHITTENHELM (1990) répond aux deux premières questions. Il prescrit de considérer tour à tour chaque origine  $r_0$ , de chercher depuis cette origine les plus courts chemins vers toutes les destinations  $s$  afin d'augmenter éventuellement les collections (= stocks) de chemins pour les relations origine-destination  $r_0 - s$ , puis d'égaliser tour à tour chacune des relations  $r_0 - s$ . Une fois toutes les origines  $r$  ainsi traitées, on teste la convergence pour déterminer s'il y a lieu de réitérer le traitement ou non.

La méthode de SCHITTENHELM est une minimisation à la GAUSS-SEIDEL de la fonction objectif, avec pour variable de pivot le vecteur des flux issus d'une certaine origine, et un caractère progressif (à un moment donné on minimise sur l'espace des chemins connus, qui est un sous-ensemble de l'espace des chemins envisageables).

Quant à la troisième question, peut-on se contenter d'une égalisation approximative, l'expérience pratique induit à répondre positivement. Mais il faut dans chaque application trouver un niveau d'égalisation convenable...

### 1.3. NOTATIONS SUPPLEMENTAIRES

Nous appelons collection de chemins  $\mathbf{M} = \{m_{rs}\}_{rs}$  un ensemble à autant d'éléments  $m_{rs}$  que de paires O-D, chaque élément  $m_{rs}$  étant un ensemble de chemins  $k$  entre  $r$  et  $s$ .

Pour un vecteur de flux sur chemins  $\mathbf{f} = \{f_{rs}^k\}_{rsk}$ , on note :

$x_a(\mathbf{f}) = \sum_{rsk} \mathbf{d}_{rs}^{ak} f_{rs}^k$  l'agrégation sur l'arc  $a$  des flux sur chemins  $\mathbf{f}$ .

$q_{rs}(\mathbf{f}) = \sum_k f_{rs}^k$  l'agrégation sur l'O-D  $r-s$  des flux sur chemins  $\mathbf{f}$ .

$K_{rs}^{k_1 k_2}(\mathbf{f}; \mathbf{a})$  le vecteur  $\mathbf{g} = \{g_{rs}^k\}_{rsk}$  qui ne diffère de  $\mathbf{f}$  que sur les deux composantes  
 $g_{rs}^{k_1} = f_{rs}^{k_1} - \mathbf{a}$  et  $g_{rs}^{k_2} = f_{rs}^{k_2} + \mathbf{a}$ .

$K_{rs}^{k,0}(\mathbf{f}; \mathbf{a})$  le vecteur  $\mathbf{g} = \{g_{rs}^k\}_{rsk}$  qui ne diffère de  $\mathbf{f}$  que sur la composante  
 $g_{rs}^k = f_{rs}^k - \mathbf{a}$ .

$K_{rs}^{0,k}(\mathbf{f}; \mathbf{a})$  le vecteur  $\mathbf{g} = \{g_{rs}^k\}_{rsk}$  qui ne diffère de  $\mathbf{f}$  que sur la composante  
 $g_{rs}^k = f_{rs}^k + \mathbf{a}$ .

**J** la fonction objectif du programme de BECKMANN (1956), dont la minimisation livre un point d'équilibre du système de transport.

#### 1.4. DÉTAIL DU PROCÉDÉ DE SCHITTENHELM

On peut résumer la variante de SCHITTENHELM (1990) par un algorithme en 6 étapes.

##### Pas 0 : Initialisations.

- Initialiser le compteur d'itérations :  $i := 0$ .
- Initialiser la collection des chemins : par exemple  $\forall r, s \ m_{rs} := \{k_{rs}^0\}$  où  $k_{rs}^0$  est un plus court chemin calculé sur la base des temps de parcours  $T_a := t_a(0)$ .
- Charger le réseau en affectant le trafic de l'O-D  $r-s$  sur le chemin  $k_{rs}^0$ .

##### Pas 1 : Progression d'ensemble.

- Incrémenter le compteur d'itérations :  $i := i + 1$ .
- Choisir la première origine  $r$ .

##### Pas 2 : Augmenter la collection de chemins.

- Depuis le sommet d'origine  $r$ , chercher les plus courts chemins sur la base des temps de parcours courants  $T_a := t_a(x_a(\mathbf{f}))$ .
- Pour chaque destination  $s$ , si le plus court chemin ainsi calculé entre  $r$  et  $s$  n'est pas déjà dans  $m_{rs}$ , l'y placer.
- Choisir la première destination  $s$ .

##### Pas 3 : Equilibrer l'O-D $r-s$ .

- Si la collection  $m_{rs}$  est vide, aller au Pas 4.
- Prendre dans  $m_{rs}$  le chemin chargé de temps maximum, disons  $k_1$  et notons  $f_{rs}^{k_1}$  sa charge, et un chemin de temps minimum, disons  $k_2$ .
- Si  $T_{rs}^{k_1}(\mathbf{f}) \leq T_{rs}^{k_2}(\mathbf{f}) + \mathbf{e}_T$ , alors aller au Pas 4.

- Chercher la solution  $\bar{\mathbf{a}}$  de :  $\min_{\mathbf{a} \in [0; f_{rs}^{k_1}]} J(\mathbf{K}_{rs}^{k_1 k_2}(\mathbf{f}; \mathbf{a}))$ . Autrement dit :
  - si  $T_{rs}^{k_1}(\mathbf{K}_{rs}^{k_1 k_2}(\mathbf{f}; f_{rs}^{k_1})) \geq T_{rs}^{k_2}(\mathbf{K}_{rs}^{k_1 k_2}(\mathbf{f}; f_{rs}^{k_1})) + \mathbf{e}_T$ , alors retenir  $\bar{\mathbf{a}} := f_{rs}^{k_1}$ ,
  - sinon retenir  $\bar{\mathbf{a}}$  tel que  $T_{rs}^{k_1}(\mathbf{K}_{rs}^{k_1 k_2}(\mathbf{f}; \bar{\mathbf{a}})) = T_{rs}^{k_2}(\mathbf{K}_{rs}^{k_1 k_2}(\mathbf{f}; \bar{\mathbf{a}}))$ .
- Actualiser :  $\mathbf{f} := \mathbf{K}_{rs}^{k_1 k_2}(\mathbf{f}; \bar{\mathbf{a}})$ , et modifier en conséquence les temps de parcours courants  $T_a = t_a(x_a(\mathbf{f}))$ .
- Recommencer le Pas 3.

Pas 4 : Nouvelle destination et nouvelle origine.

- Si  $s$  n'est pas la dernière destination, alors considérer la destination suivante et aller au Pas 3.
- Si  $s$  est la dernière destination, si  $r$  n'est pas la dernière origine, alors considérer l'origine suivante et aller au Pas 2.
- Si  $r$  est la dernière origine et  $s$  la dernière destination, aller au Pas 5.

Pas 5 : Test de convergence.

- Noter  $\mathbf{f}^{(i)}$  le vecteur de flux sur chemins obtenu en fin de la  $i$ -ème itération.
- Si  $\mathbf{f}^{(i)}$  satisfait un test de convergence, alors Terminer ; Sinon, retourner au Pas 1.

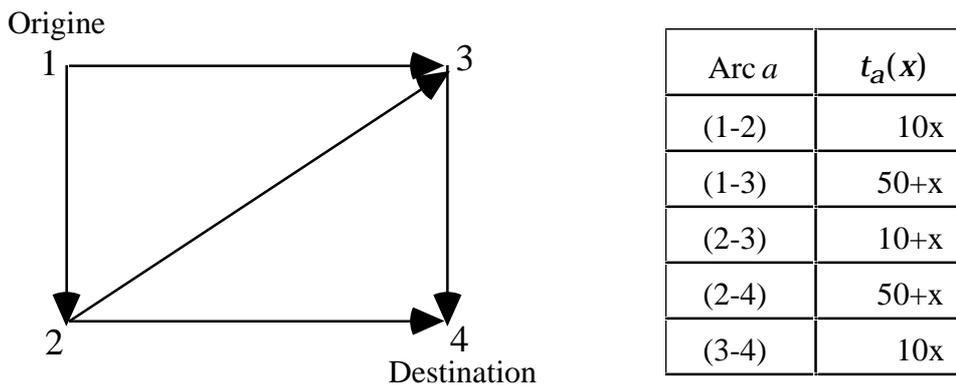
Un test intuitif de convergence consiste à examiner si :

$$\max_{r,s,k_2,k_1 \text{ tel que } f_{rs}^{k_1} > 0} T_{rs}^{k_1}(\mathbf{f}^{(i)}) - T_{rs}^{k_2}(\mathbf{f}^{(i)}) \leq \mathbf{e}_G$$

1.5. DEROULEMENT D'UN EXEMPLE

Nous adaptions un exemple adapté de (MARCOTTE, ZHU, 1994) et que nous reprendrons exactement au §2.4. Soit un réseau à 4 noeuds et 5 arcs, reliant une unique origine à une unique destination par 3 chemins  $\underline{1} = \{(1-2); (2-4)\}$ ,  $\underline{2} = \{(1-2); (2-3); (3-4)\}$  et  $\underline{3} = \{(1-3); (3-4)\}$  (Figure 4), avec un flux de demande de 6 unités.

Figure 4 : Données pour le cas d'école



Le Tableau 1 expose, à la fin de certains transferts (repérés par le numéro de l'itération et le numéro d'exécution du Pas 3 dans cette itération), les valeurs des principales variables d'état du système : le flux et le temps de chaque chemin.

Tableau 1 : Quelques états intermédiaires

Itération . n° de Pas 3	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
0	0.00	6.00	0.00	110.00	136.00	110.00
1	2.17	3.83	0.00	112.16	112.16	88.33
2.1	1.08	3.83	1.08	100.25	112.16	100.25
2.2	2.08	2.84	1.08	101.24	101.24	90.32
2.3	1.58	2.84	1.58	95.68	101.24	95.68
2.5	1.81	2.39	1.81	93.73	96.23	93.73
2.10	2.00	2.04	1.96	92.41	92.41	91.93
2.16	2.00	2.00	2.00	92.00	92.00	92.00

Il y a convergence en 2 itérations, avec pour la deuxième itération 16 transferts : donc en tout 17 transferts. Il faut 24 itérations de l'algorithme de FRANK-WOLFE pour parvenir à ce résultat, mais l'exemple choisi favorise cette méthode.

Dans la pratique, il paraît judicieux d'appliquer avec modération le principe d'égalisation sur une même relation O-D au cours d'une itération : autrement dit, il est bon de limiter le nombre de transferts pour chaque relation O-D au Pas 3 de l'algorithme, à une valeur de 3 par exemple. Une justification intuitive tient au « couplage » entre les relations O-D : si 2 itinéraires sont concurrents entre une origine et une destination données, et si le réseau d'application compte de nombreuses zones de demande, alors très probablement il y aura d'autres O-D où les mêmes portions d'itinéraires sont en concurrence. Donc on peut attendre une « égalisation entre points de choix sur le réseau » grâce à une succession de transferts entre O-D différentes.

## 2. EXTENSION A D'AUTRES MODELES

Nous présentons d'abord un principe pour étendre le procédé d'égalisation à d'autres modèles que le modèle déterministe homogène de BECKMANN traité par SCHITTENHELM (2.1.). Puis nous appliquons ce principe en abordant successivement la demande élastique (2.2.), le modèle logit linéaire (2.3.), et le modèle prix-temps à demande élastique agrégée (2.4.).

### 2.1. UN PRINCIPE D'EXTENSION

Appliqué au modèle déterministe homogène de BECKMANN, l'opération d'égalisation porte sur les temps de parcours des chemins. Une extension naturelle à un autre modèle est de remplacer le temps de parcours  $T_{rs}^k(\mathbf{f})$  d'un chemin  $k$  par une fonction d'impédance plus générale  $G_{rs}^k(\mathbf{f})$ , de manière que l'égalité entre les impédances des chemins utilisés et la minimalité soient synonymes de l'équilibre du modèle. Pour cela, une fonction  $G_{rs}^k$  doit remplir deux exigences.

[E1] Un impératif d'ordre théorique : l'égalité des impédances  $G_{rs}^k$  des chemins utilisés, et leur minimalité par rapport à celles des chemins envisageables, doivent équivaloir aux conditions caractéristiques d'un état d'équilibre du modèle.

[E2] Un impératif d'ordre pratique : entre deux chemins  $k_1$  et  $k_2$  tels que  $G_{rs}^{k_1}(\mathbf{f}) > G_{rs}^{k_2}(\mathbf{f})$ , une fonction d'écart  $\Phi(\mathbf{a}) = G_{rs}^{k_1}(\mathbf{K}_{rs}^{k_1 k_2}(\mathbf{f}; \mathbf{a})) - G_{rs}^{k_2}(\mathbf{K}_{rs}^{k_1 k_2}(\mathbf{f}; \mathbf{a}))$  doit décroître en fonction du flux transférable  $\mathbf{a}$ .

La preuve de convergence de (SCHITTENHELM, 1990) s'applique.

Nous allons énoncer et démontrer un théorème qui guide le choix d'une fonction  $G_{rs}^k$ , pour un modèle doté d'une formulation extrémale.

**Théorème 1, condition suffisante d'extension.** Si l'on peut caractériser un état d'équilibre d'un certain modèle, comme une solution d'un programme d'optimisation convexe  $\min_{\mathbf{g} \geq 0; \sum_n g_{rs}^n = Q_{rs}} J_m(\mathbf{g})$ , alors les dérivées partielles de la fonction objectif fournissent des

fonctions  $G_{rs}^n(\mathbf{g}) = \frac{\partial J_m}{\partial g_{rs}^n}(\mathbf{g})$  qui satisfont les exigences E1 et E2.

La preuve est donnée en Appendice A.

Nous avons volontairement noté  $n$  plutôt que  $k$ ,  $\mathbf{g}$  plutôt que  $\mathbf{f}$ , et  $Q_{rs}$  plutôt que  $q_{rs}$  : c'est pour que le théorème s'applique à la fois à la demande fixe et à la demande élastique. Dans le cas à demande fixe, il suffit de remplacer  $n$  par  $k$ ,  $\mathbf{g}$  par  $\mathbf{f}$  et  $Q_{rs}$  par  $q_{rs}$  dans l'énoncé. Dans le cas à demande élastique, il faut définir  $\{n\} = \{k\} \cup \{0\}$ , et  $\mathbf{g} = (\mathbf{f}; \mathbf{f}^0)$  où  $\mathbf{f}^0 = \{f_{rs}^0\}_{rs}$  est le vecteur des flux de demande en excès (voir ci dessous pour plus de précisions) : ainsi les contraintes de flux origine-destination deviennent  $f_{rs}^0 + \sum_k f_{rs}^k = Q_{rs}$  ou encore  $f_{rs}^0 + q_{rs}(\mathbf{f}) = Q_{rs}$ . On en

déduit évidemment que  $\frac{\partial f_{rs}^0}{\partial q_{rs}} = \frac{\partial q_{rs}}{\partial f_{rs}^0} = -1$ , dont il résulte que

$$G_{rs}^0(\mathbf{f}) = \frac{\partial J_m}{\partial f_{rs}^0} = \frac{\partial J_m}{\partial q_{rs}} \frac{\partial q_{rs}}{\partial f_{rs}^0} = -\frac{\partial J_m}{\partial q_{rs}}.$$

## 2.2. CAS DE LA DEMANDE ELASTIQUE

Pour traiter le modèle déterministe homogène à demande élastique, une solution élégante<sup>1</sup> due à MURCHLAND (1970) est de rajouter un arc imaginaire  $a_{rs}$  entre le sommet d'origine  $r$  et le sommet de destination  $s$ , et de lui attacher une fonction fictive de temps de parcours  $t_{a_{rs}}(x) = D_{rs}^{-1}(Q_{rs} - x)$ , où  $Q_{rs}$  est un majorant de la fonction de demande  $D_{rs}$ , par exemple  $Q_{rs} = D_{rs}(0)$ .

Le programme de BECKMANN à demande élastique, originellement formulé comme :

$$\min_{\mathbf{f} \geq 0} J(\mathbf{f}) = \sum_a \left\{ \int_0^{x_a(\mathbf{f})} t_a(z) dz \right\} - \sum_{rs} \left\{ \int_0^{q_{rs}(\mathbf{f})} D_{rs}^{-1}(z) dz \right\}$$

<sup>1</sup> Formulation de la « demande en excès ».

$$\text{devient}^2 : \min_{\mathbf{g} \geq 0; \mathbf{g} = (\mathbf{f}; \mathbf{f}^0)} J(\mathbf{g}) = \sum_a \left\{ \int_0^{x_a(\mathbf{f})} t_a(z) dz \right\} + \sum_{rs} \left\{ \int_0^{f_{rs}^0} t_{a_{rs}}(z) dz \right\}$$

sous les contraintes  $f_{rs}^0 + q_{rs}(\mathbf{f}) = Q_{rs}$ .

En donnant l'indice  $n=0$  au chemin imaginaire entre  $r$  et  $s$ , il suffit de définir :  $G_{rs}^0(\mathbf{f}) = D_{rs}^{-1}(\sum_k f_{rs}^k)$  et de conserver la définition  $G_{rs}^k(\mathbf{f}) = T_{rs}^k(\mathbf{f})$  pour tout chemin réel  $n=k>0$ . Ainsi, si  $G_{rs}^k(\mathbf{f}) > G_{rs}^0(\mathbf{f})$ , on réduit  $f_{rs}^k$ , ce qui d'une part réduit  $G_{rs}^k$ , d'autre part réduit  $\sum_k f_{rs}^k$  donc augmente  $D_{rs}^{-1}(\sum_k f_{rs}^k)$  : au total, l'écart  $G_{rs}^k - G_{rs}^0$  se réduit doublement.

L'exigence E2 est donc satisfaite. Quant à l'exigence E1, elle signifie que, entre les vrais chemins, seuls sont utilisés des chemins dont le coût est minimal, et que, pour le chemin fictif, on a :  $D_{rs}^{-1}(\sum_k f_{rs}^k) = \min_k T_{rs}^k$ , donc  $q_{rs} = D_{rs}(\min_k T_{rs}^k)$  qui est la condition d'équilibre entre volume de demande  $q_{rs}$  et niveau de service déterministe  $\min_k T_{rs}^k$ .

**Comparaison à la méthode de NAGURNEY.** La solution que nous proposons pour traiter la demande élastique diffère de celle de NAGURNEY (1988) seulement dans l'application de l'algorithme. L'algorithme de NAGURNEY ne prévoit pas de répéter le Pas 3 plusieurs fois consécutives pour une même relation O-D : en cela il suit l'approche de DAFERMOS, SPARROW (1969) mais se différencie de celui de SCHITTENHELM étendu à la demande élastique. Par rapport à la méthode de DAFERMOS et SPARROW, NAGURNEY choisit deux chemins réels  $k_1$  et  $k_2$ , et elle égalise simultanément  $G_{rs}^{k_1}$ ,  $G_{rs}^{k_2}$  et  $G_{rs}^0$ . Comme elle conclut que son approche est plus efficace que celle de DAFERMOS et SPARROW adaptée pour traiter la demande élastique, nous pouvons directement inférer que la méthode de SCHITTENHELM est plus efficace que les deux autres, puisque le procédé de SCHITTENHELM « égalise davantage » que celui de NAGURNEY, qui lui-même « égalise davantage » que celui de DAFERMOS et SPARROW.

### 2.3. CAS DU MODELE LOGIT LINEAIRE

Dans le modèle logit linéaire, tous les chemins définis comme « attractants » sont chargés, et la condition d'équilibre s'écrit :

$$f_{rs}^{k_1} / f_{rs}^{k_2} = \exp(-\mathbf{q}(T_{rs}^{k_1} - T_{rs}^{k_2}))$$

En application du théorème 1, vu la caractérisation de l'équilibre logit linéaire par une formulation extrême dans (LEURENT, 1994a), on retient :

- $G_{rs}^k = T_{rs}^k + \frac{1}{\mathbf{q}} \ln\left(\frac{f_{rs}^k}{q_{rs}}\right)$  pour un chemin réel,
- $G_{rs}^0 = D_{rs}^{-1}(q_{rs})$  si la demande est élastique.

Notons que, dans le modèle logit linéaire, les chemins doivent être définis à l'avance (LEURENT, 1994a). Quand on lui applique le procédé d'égalisation, il convient donc de

---

<sup>2</sup> A une constante  $-\sum_{rs} \int_0^{Q_{rs}} D_{rs}^{-1}(z) dz$  près, car, grâce à la relation de Chasles, on vérifie  $-\int_0^{q_{rs}(\mathbf{f})} D_{rs}^{-1}(z) dz = -\int_0^{Q_{rs} - f_{rs}^0} D_{rs}^{-1}(z) dz = -(\int_0^{Q_{rs}} D_{rs}^{-1}(z) dz) + \int_0^{f_{rs}^0} D_{rs}^{-1}(Q_{rs} - z) dz$ .

remplacer l'initialisation de la collection des chemins (au Pas 0) par le chargement de chemins déjà calculés<sup>3</sup>, et d'ôter l'augmentation de la collection des chemins prévue en cours d'itération (au Pas 2).

#### 2.4. CAS DU MODELE PRIX-TEMPS A DEMANDE TOTALE ELASTIQUE

Pour le modèle prix-temps à demande élastique agrégée défini par LEURENT (1993a), on peut choisir en application du Théorème 1 :

$$\bullet G_{rs}^k = T_{rs}^k + \sum_{i=m_{rs}(k)}^{\bar{m}_{rs}-1} \frac{P_{rs}^i - P_{rs}^{i+1}}{H_{rs}^{-1}(Q_{rs}^i / q_{rs})}, \text{ pour un chemin réel,}$$

$$\bullet G_{rs}^0 = D_{rs}^{-1}(q_{rs}) - \left\{ F_{rs}(1)P_{rs}^{\bar{m}_{rs}} + \sum_{i=1}^{\bar{m}_{rs}-1} (P_{rs}^i - P_{rs}^{i+1}) \cdot \left( F_{rs} \left( \frac{Q_{rs}^i}{q_{rs}} \right) - \frac{Q_{rs}^i / q_{rs}}{H_{rs}^{-1}(Q_{rs}^i / q_{rs})} \right) \right\}$$

si la demande est élastique,

en notant  $m_{rs}(k)$  l'indice de classe monétaire du chemin  $k$ , une classe monétaire de chemins  $i$  regroupant tous les chemins d'un prix donné  $P_{rs}^i$  sur l'O-D  $r$ - $s$ . L'indexation des classes monétaires suit l'ordre des prix croissants, et il y a  $\bar{m}_{rs}$  classes monétaires. On note  $Q_{rs}^i$  le trafic de l'O-D  $r$ - $s$  qui est affecté sur les chemins de prix  $\leq P_{rs}^i$ .  $H_{rs}^{-1}$  est la réciproque de la fonction de répartition cumulée des valeurs du temps sur l'O-D  $r$ - $s$ , tandis que  $F_{rs}(x) = \int_0^x \frac{dt}{H_{rs}^{-1}(t)}$ .

Lorsque tous les chemins sont chargés, un  $G_{rs}^k$  minimum s'interprète comme le temps de parcours du chemin le plus rapide. Au temps de parcours  $T_{rs}^k$  du chemin  $k$ , on soustrait une série de rapports entre une différence de prix  $P_{rs}^{i+1} - P_{rs}^i$  et une valeur du temps de coupure  $F_{rs}^{-1}(Q_{rs}^i / q_{rs})$ , donc une série de gains de temps entre classes monétaires de prix consécutifs, jusqu'à parvenir à la classe la plus chère.

**Adaptations particulières du procédé d'égalisation.** Pour adapter au modèle prix-temps l'algorithme de SCHITTENHELM décrit au 1.3., il faut non seulement remplacer  $T_{rs}^k$  par  $G_{rs}^k$ , mais encore, dans une recherche de plus courts chemins, chercher pour chaque O-D non pas un seul chemin mais un ensemble de chemins tels que pour chaque valeur du temps l'un des chemins soit efficace. Quand les prix des chemins dépendent uniquement de péages  $P_a$  sur les arcs, les temps généralisés par arcs à considérer dans une recherche de chemin efficace pour une valeur du temps  $v$  s'expriment  $T_a = t_a(x_a(\mathbf{f})) + P_a / v$ .

Une solution de simplicité consiste à chercher un seul chemin à la fois depuis chaque origine au Pas 2, chemin tel qu'il soit efficace pour une certaine valeur du temps  $v_{rs}^{(i)}$  tirée au hasard selon la loi de probabilité propre à l'O-D. Mais alors, au niveau du test de convergence, il faut imposer par prudence la stabilité de la collection des itinéraires pendant la dernière itération et si possible quelques précédentes.

<sup>3</sup> Le logiciel MARS (LEURENT, 1995b) permet de calculer à l'avance plusieurs chemins différents pour chaque relation origine-destination, ce qui soulage l'utilisateur d'un codage manuel préalable des itinéraires.

**Application numérique.** Nous reprenons exactement l'application numérique de (MARCOTTE, ZHU, 1994) qui se distingue de l'exemple développé au 1.4. par deux ajouts :

- on associe des péages aux arcs : les prix des chemins 1, 2 et 3 valent ainsi respectivement 200, 190 et 210.

- on considère une distribution continue des valeurs du temps parmi les déplacements, de loi triangulaire entre 0 et 2 (voir l'appendice B pour l'expression des fonctions liées à la distribution statistique des valeurs du temps).

Au bout de deux itérations et de 16 transferts, la fonction objectif ne décroît plus et les flux sont stables à  $1e-5$  près. Pour parvenir au même résultat, l'algorithme de FRANK-WOLFE employé dans (MARCOTTE, ZHU, 1994), demande entre 60 et 70 itérations. Notons que le nombre des transferts nécessaire au procédé d'égalisation est équivalent dans le cas bi-critères à celui nécessaire dans le cas à une seule valeur du temps.

Tableau 2 : Quelques états intermédiaires

Itération . n° de Pas 3	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$G_1$	$G_2$	$G_3$
0	0.00	0.00	6.00	?	?	111.0
1	2.58	0.00	3.42	73.3	70.0	73.3
2.1	2.57	0.19	3.23	74.5	72.1	72.1
2.2	2.47	0.19	3.33	73.4	72.1	73.4
2.5	2.43	0.31	3.26	73.9	73.4	73.4
2.10	2.40	0.34	3.27	73.7	73.7	73.7
2.15	2.39	0.34	3.27	73.7	73.7	73.7

## 2.5. AUTRES EXTENSIONS FACILES

On étend facilement le procédé de SCHITTENHELM pour :

- traiter plusieurs classes, chacune pouvant relever de l'un des modèles examinés ci-dessus, logit linéaire ou bicritère (prix-temps), avec la demande élastique si désiré : il suffit d'ajouter un Pas 4' pour considérer la prochaine classe.

- associer à certains arcs des contraintes de capacité. Une solution possible (LARSSON, PATRIKSSON, 1994) consiste à rajouter une boucle de niveau supérieur, afin de chercher le point-selle d'un lagrangien augmenté : au cours d'une itération de niveau supérieur, on applique d'abord le procédé d'égalisation pour résoudre un programme d'optimisation libre dans lequel les fonctions de temps de parcours des arcs dépendent des variables duales associées aux contraintes de capacité, puis on actualise les multiplicateurs (variables duales) une fois que le programme libre particulier est résolu.

Ces deux extensions, choisies parmi bien d'autres possibles, ont été incorporées au programme MARS (LEURENT, 1995b).

### 3. EXPERIENCES NUMERIQUES

#### 3.1. PRINCIPES DES TESTS ET DONNEES D'APPLICATION

Nous posons 4 principes méthodologiques pour les expériences numériques :

- pour chaque modèle (parmi déterministe homogène - BECKMANN -, logit linéaire additif, prix-temps), nous appliquons le procédé d'égalisation en concurrence avec une (ou plusieurs) méthodes « classiques ».
- la comparaison entre algorithmes porte non seulement sur le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un certain niveau de convergence, mais encore et davantage sur le temps total passé (sachant que les calculs sont faits à l'aide d'un même outil, le programme MARS en l'occurrence).
- le niveau de convergence atteint à l'issue d'un certain nombre d'itérations est mesuré à l'aide de la fonction objectif évaluée au point courant.
- l'application considérée est de taille moyenne (140 zones et 2000 arcs), elle a lieu sur un micro-ordinateur compatible IBM-PC (donc représentatif des outils couramment disponibles dans un bureau d'études de transport).

**Les données de l'application.** La société COFIROUTE nous a aimablement communiqué deux jeux de données codant respectivement un réseau routier urbain à l'ouest de Paris (Cf. Annexe D) et une matrice O-D des déplacements à l'heure de pointe du soir. Le réseau comprend environ 2 000 arêtes unidirectionnelles. Il y a 141 zones de demande, donc près de 20 000 paires origine-destination. Les fonctions de temps de parcours sont de type BPR, paramétrées selon  $t_a(x) = t_a^0(1 + 0.15(\frac{x}{C_a})^4)$ , avec  $C_a$  capacité pratique, cela pour les arcs qui ne sont pas des connecteurs<sup>4</sup>. On considère la fonction de demande d'élasticité constante  $q_{rs} = D_{rs}(t) = q_{rs}^0(t/t_{rs}^0)^{-0.6}$ , avec  $(t_{rs}^0; q_{rs}^0)$  un point de référence particulier à la relation O-D  $r$ - $s$  (cette élasticité constante de -0.6 est classique des modèles de demande de transport, même si selon le site, le mode et la période, la valeur peut varier de -0.3 à -2.0).

#### 3.2. LE MODELE DETERMINISTE HOMOGENE

Dans le modèle déterministe homogène, les auteurs des déplacements minimisent le temps de déplacement, dont ils ont une connaissance parfaite et une même évaluation. Quand la demande est élastique (hypothèse retenue ici), le niveau de service est le temps de trajet minimum sur l'O-D.

**Les algorithmes en lice.** Nous appliquons en concurrence trois algorithmes au modèle de BECKMANN :

- la méthode de FRANK-WOLFE.
- la méthode des moyennes successives, avec un pas de descente à la  $i$ -ème itération défini à l'avance comme  $1/(1+i)$ .
- la PET, avec un seuil d'intervention au Pas 3 choisi égal à  $1e-4$  h (pour des temps de parcours typiques d'une demi-heure, donc la précision relative de l'équilibrage est meilleure que 1 %), et au plus trois transferts par paire O-D dans une même itération.

---

<sup>4</sup> Pour les connecteurs, on suppose que le temps de parcours ne dépend pas du niveau de trafic.

A l'issue de la  $i$ -ème itération, on retient pour indicateur de convergence la quantité  $\frac{J(\mathbf{f}^{(i)}) - J^*}{J^*}$ , avec  $J^*$  la valeur optimale du programme d'optimisation. Dans les tableaux qui suivent, on mesure le niveau de convergence comme le logarithme décimal de cet indicateur.

Tableau 3 : Résultats pour le modèle de Beckmann

Algorithme	Niveau de convergence à l'itération $i$									Temps par itération (mn)
	1	2	5	10	20	50	100	200	400	
Frank-Wolfe	-1,0	-1,3	-1,7	-2,0	-2,4	-3,0	-3,6	-4,1	-5,5	2,0
Moyennes successives	0,1	-0,7	-1,4	-1,8	-2,1	-2,6	-2,8	-3,1	-3,5	0,7
Egalisation	-1,5	-2,0	-3,0	-3,7	-4,4	-4,6				6,8

En nombre d'itérations, la PET converge beaucoup plus rapidement que ses deux concurrents, entre lesquels la méthode de FRANK-WOLFE semble préférable. La supériorité de la PET se maintient si l'on considère les temps. Notons l'atténuation progressive de l'efficacité de la PET : c'est là un effet du seuil de mise en oeuvre  $e_T$  (au Pas 3), car pour améliorer la précision il faudrait abaisser ce seuil en cours de route.

### 3.3. MODELE LOGIT LINEAIRE

Dans le cas du modèle logit linéaire, nous appliquons en concurrence la PET et la méthode des moyennes successives, avec la même collection de chemins, définie à l'avance. On retient un paramètre de dispersion  $q$  égal à  $0,233 \text{ mn}^{-1}$  (donc quand deux chemins sont en concurrence, si le second est plus long de 5 mn, alors les trois quarts des individus choisissent le premier et le quart restant le second).

Tableau 4 : Résultats pour le modèle logit linéaire

Algorithme	Niveau de convergence à l'itération $i$							Temps par itération (mn)
	1	2	5	10	20	50	90	
Moyennes successives	-1,3	-1,7	-2,5	-3,4	-4,5	-5,7	-8,2	2,6
Egalisation	-1,7	-2,7	-3,9	-4,5	-4,5	-4,5		6,9

En termes de nombre d'itérations, on constate encore l'efficacité initiale supérieure de la PET, qui disparaît en cours de route en raison de la présence du seuil de mise en oeuvre. En termes de temps de calcul, les deux algorithmes sont à peu près équivalents : mais notons que là les chemins sont explicités, ce qui explique le temps relativement élevé passé dans une itération par l'algorithme des moyennes successives. Si l'on explicitait automatiquement les chemins (par STOCH3, (LEURENT, 1994a)), la méthode des moyennes successives serait beaucoup plus rapide (d'un facteur 5, environ).

### 3.4. MODELE PRIX-TEMPS A DEMANDE ELASTIQUE AGREGEE

La dernière série de tests concerne le modèle bicritère (prix-temps) à demande élastique agrégée. On a retenu comme distribution des valeurs du temps une loi log-normale<sup>5</sup> de médiane 60 F/h, et d'écart-type de loi du logarithme naturel 0,6 (valeurs standards en urbain, (MARCHE, 1988)). Les chemins sont recherchés à chaque itération, depuis chaque origine, en tirant au hasard une valeur du temps. Le Tableau 5 montre cette fois la nette supériorité de la PET par rapport à la méthode des moyennes successives avec chemins explicités (LEURENT, 1993b), autant en nombre d'itérations qu'en temps de calcul pour atteindre un certain niveau de convergence.

Notons que pour la PET le temps passé dans une itération n'est que légèrement supérieur pour le modèle bicritère à ce qu'il est pour le cas avec une seule valeur du temps (Cf. Tableau 3). Cela montre qu'avec un algorithme approprié, un modèle d'affectation sophistiqué est tout à fait traitable, à un coût d'emploi inférieur en fait à celui des algorithmes usuels pour les modèles d'affectation plus rustiques.

Tableau 5 : Résultats pour le modèle bicritère prix-temps

Algorithme	Niveau de convergence à l'itération $i$									Temps par itération (mn)
	1	2	5	10	20	50	100	200	400	
Moyennes successives	-0,9	-1,3	-1,6	-2,0	-2,4	-3,1	-3,5	-3,9	-4,0	4,4
Egalisation	-1,4	-2,0	-2,8	-3,3	-3,5	-3,7				7,5

Pour terminer, nous avons appliqué au même problème d'affectation prix-temps la méthode des moyennes successives sans explicitation des chemins (F. LEURENT, 1993a). Pour un temps par itération 6 fois moindre qu'avec explicitation, la précision des débits synthétisés est comparable pendant les 200 premières itérations, mais ensuite elle stagne. Cela signifie que si l'on peut se contenter de la précision obtenue en 200 itérations par la méthode des moyennes successives, il est inutile d'expliciter les chemins. Mais la solution de meilleur rapport qualité-prix est, dans tous les cas, d'appliquer la PET en abaissant progressivement le seuil de mise en route.

## CONCLUSIONS

Le travail mené développe le champ d'application de la procédure d'égalisation par transvasement à tout modèle d'affectation dont l'équilibre est solution d'un programme de minimisation convexe : cela englobe notamment le modèle déterministe homogène à demande élastique, le logit linéaire et le modèle bicritère à demande élastique agrégée.

Sur une application de taille moyenne, la PET est compétitive avec les algorithmes conventionnels, en termes de temps de calcul pour résoudre le modèle déterministe homogène. Plus important, elle permet de traiter des modèles qui sophistiquent la représentation de la demande, à un coût de peu supérieur à celui requis pour le modèle déterministe homogène.

Ces constats portent un témoignage supplémentaire quant à la contribution des mathématiques à la modélisation : c'est grâce à l'addition de deux innovations mathématiques (formulation en programme de minimisation convexe dans (LEURENT, 1993a), extension de la PET ici) que le

<sup>5</sup> On fournit en Annexe C le formulaire nécessaire au traitement d'une loi log-normale.

modèle bicritère devient plus attrayant que le modèle déterministe homogène, puisque théoriquement plus riche et traitable à un coût équivalent.

L'explicitation des chemins trouve des applications pratiques immédiates : repérage des trajets des véhicules qui passent par une route donnée, etc. Elle permet aussi de mener des analyses de sensibilité ((LEURENT, 1994b) pour le modèle bicritère). Elle ouvre la voie à une nécessaire recherche empirique quant aux itinéraires réellement sélectionnés sur un réseau. Une telle recherche pouvait paraître inutile tant que les modèles ne pouvaient utiliser son produit. Ce n'est plus le cas maintenant : la sélection des chemins devient la question centrale en matière d'affectation, enfin !

#### **BIBLIOGRAPHIE**

- BECKMANN M., MCGUIRE C.B., WINSTEN C.B. (1956), **Studies in the Economics of Transportation**. Yale University Press, New Haven, Connecticut.
- DAFERMOS S.C., SPARROW F.T. (1969), The Traffic Assignment Problem for a General Network. **J. Res. Natl. Bur. Stand.**, Vol. 73B, pp. 91-118.
- FISK C. (1980), Some developments in equilibrium traffic assignment methodology. **Transportation Research B**, Vol. 14, pp. 243-256.
- GIBERT A. (1968), **A Method for the Traffic Assignment Problem**. Report LBS-TNT-95, Transportation Network Theory Unit, London Business School, London.
- LARSSON T., PATRIKSSON M. (1992), Simplicial Decomposition with Disaggregate Representation for the Traffic Assignment Problem. **Transportation Science** Vol. 26, pp. 4-17.
- LARSSON T., PATRIKSSON M. 1994, An augmented Lagrangean Scheme for Capacitated Traffic Assignment Problems. In **Actes INRETS** Vol. 38, pp. 163-199, INRETS, Arcueil.
- LEURENT F. (1993a), Cost versus Time Equilibrium over a Network. **Eur. J. of Oper. Res.** Vol. 71/2, pp. 205-221.
- LEURENT F. (1993b), Modelling Elastic, Disaggregate Demand. In **Proceedings of the First Meeting of the Euro Working Group on Urban Traffic and Transportation**, Technical University of Munich, Munich.
- LEURENT F. (1994a), Logit-based equilibrium assignment model with elastic demand, capacity constraints and a dual solution algorithm. In **Actes INRETS** Vol. 38, pp. 125-162, INRETS, Arcueil.
- LEURENT F. (1994b), **Analyse de sensibilité et d'erreur d'un modèle - le cas de l'affectation prix-temps**. Note de Travail 94.1, INRETS, Arcueil.
- LEURENT F. (1995a), **Une famille d'algorithmes d'équilibrage pour des modèles d'affectation statique du trafic routier**. Note de Travail 95.1, INRETS, Arcueil.
- LEURENT F. (1995b), **Une Boîte-à-Outils pour opérer diverses affectations statiques du trafic routier**. Rapport de recherche INRETS n° 198, INRETS, Arcueil.
- MARCHE R. (1988), **Notes de Travail LASER 88.1 à 88.7**. Documents internes INRETS, INRETS, Arcueil.
- MARCOTTE P., ZHU D. (1994), An efficient algorithm for a bicriterion traffic assignment problem. **Preprints of the 3rd Capri Seminar** Vol. 2, pp. 891-897, Capri, June.

MURCHLAND D. (1970), Gleichgewichtsverteilung des Verkehrs um Strassennetz. In **Oper. Res. Verfahren VIII** (Edited by R. Henn et al.), pp. 145-183.

NAGURNEY A. (1988), An equilibration scheme for the traffic assignment problem with elastic demands. **Transportation Research B**, Vol. 22/1, pp. 73-79.

PATRIKSSON M. (1994), **The traffic assignment problem : models and methods**. VSP, Utrecht, Pays-Bas.

SCHITTENHELM H. (1990), **On the integration of an effective assignment algorithm with path and path-flow management in a combined trip distribution and traffic assignment algorithm**. PTRC, 18th Summer Annual Meeting, Proceedings of Seminar H.

## ANNEXES

### ANNEXE A. PREUVE DU THEOREME D'EXTENSION

Preuve. Notons  $v_{rs}$  le multiplicateur de LAGRANGE associé à la contrainte  $\sum_n g_{rs}^n = Q_{rs}$ , et  $\mathbf{v} = \{v_{rs}\}_{rs}$ . Le lagrangien associé au programme de minimisation vaut :

$$\mathfrak{L}(\mathbf{g}; \mathbf{v}) = J_m(\mathbf{g}) - \sum_{rs} v_{rs} (\sum_k g_{rs}^k - Q_{rs})$$

A l'équilibre, on vérifie les conditions de KUHN-TUCKER :

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{rs}^n} = \frac{\partial J_m}{\partial g_{rs}^n} - v_{rs} \geq 0, \text{ donc } G_{rs}^n - v_{rs} \geq 0 \quad (1)$$

$$g_{rs}^n \cdot \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{rs}^n} = 0, \text{ donc } g_{rs}^n > 0 \Rightarrow G_{rs}^n = v_{rs} \quad (2)$$

$$\sum_n g_{rs}^n = Q_{rs} \text{ bien évidemment...} \quad (3)$$

La condition (2) signifie l'égalité des impédances entre les chemins utilisés d'une même relation O-D ; ajoutée à cela, la condition (1) implique que les impédances des chemins non utilisés sont supérieures à l'impédance minimale  $v_{rs}$ . Donc E1 est satisfaite.

La satisfaction de l'exigence pratique E2 résulte quant à elle de la convexité de la fonction objectif  $J_m$ . Exprimons la variation entre  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{a}+\mathbf{h}$  de la fonction d'écart :

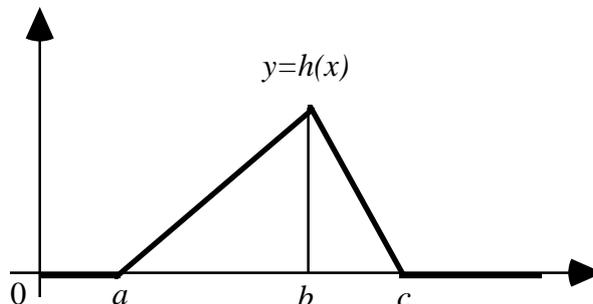
$$\begin{aligned} & \Phi(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{a}) \\ &= G_{rs}^{n_1}(\mathbf{K}_{rs}^{n_1 n_2}(\mathbf{g}; \mathbf{a} + \mathbf{h})) - G_{rs}^{n_2}(\mathbf{K}_{rs}^{n_1 n_2}(\mathbf{g}; \mathbf{a} + \mathbf{h})) - G_{rs}^{n_1}(\mathbf{K}_{rs}^{n_1 n_2}(\mathbf{g}; \mathbf{a})) + G_{rs}^{n_2}(\mathbf{K}_{rs}^{n_1 n_2}(\mathbf{g}; \mathbf{a})) \\ &= \frac{\partial J_m}{\partial g_{rs}^{n_1}}(\mathbf{K}(\mathbf{g}; \mathbf{a} + \mathbf{h})) - \frac{\partial J_m}{\partial g_{rs}^{n_2}}(\mathbf{K}(\mathbf{g}; \mathbf{a} + \mathbf{h})) - \frac{\partial J_m}{\partial g_{rs}^{n_1}}(\mathbf{K}(\mathbf{g}; \mathbf{a})) + \frac{\partial J_m}{\partial g_{rs}^{n_2}}(\mathbf{K}(\mathbf{g}; \mathbf{a})) \\ &= (\nabla J_m(\mathbf{K}(\mathbf{g}; \mathbf{a} + \mathbf{h})) - \nabla J_m(\mathbf{K}(\mathbf{g}; \mathbf{a}))) \cdot \left( \frac{\mathbf{K}(\mathbf{g}; \mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{K}(\mathbf{g}; \mathbf{a})}{-\mathbf{h}} \right) \end{aligned}$$

car seules les composantes d'indices  $r-s-n_1$  et  $r-s-n_2$  sont concernées. Comme la convexité de  $J_m$  implique que  $(\nabla J_m(x) - \nabla J_m(y)) \cdot (x - y) \geq 0$ , on déduit que  $\Phi(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{a}) \leq 0$  quand  $\mathbf{h} \geq 0$ . Donc la fonction d'écart décroît quand le flux à transférer croît, d'où E2.

## ANNEXE B. FORMULAIRE POUR UNE DISTRIBUTION TRIANGULAIRE DES VALEURS DU TEMPS

Soit une distribution des valeurs du temps selon une loi de probabilité triangulaire (Figure 6).

Figure 6 : Distribution triangulaire des valeurs du temps



La fonction de densité  $h$  vaut :

$$- h(x) = 0 \quad \text{sur } ]-\infty; a] \cup [c; +\infty[$$

$$- h(x) = \frac{2}{c-a} \frac{x-a}{b-a} \quad \text{sur } [a; b]$$

$$- h(x) = \frac{2}{c-a} \frac{c-x}{c-b} \quad \text{sur } [b; c].$$

On calcule aisément la fonction de distribution cumulative  $H(x) = \int_0^x h(t) dt$  :

$$- H(x) = 0 \quad \text{sur } ]-\infty; a]$$

$$- H(x) = \frac{(x-a)^2}{(c-a)(b-a)} \quad \text{sur } [a; b]$$

$$- H(x) = 1 - \frac{(c-x)^2}{(c-a)(c-b)} \quad \text{sur } [b; c]$$

$$- H(x) = 1 \quad \text{sur } [c; +\infty[.$$

Cette fonction cumulative admet pour réciproque :

$$- H^{-1}(u) = a + \sqrt{(c-a)(b-a)u} \quad \text{sur } [0; \frac{b-a}{c-a}]$$

$$- H^{-1}(u) = c - \sqrt{(c-a)(c-b)(1-u)} \quad \text{sur } [\frac{b-a}{c-a}; 1].$$

L'inverse de la fonction cumulative réciproque a pour primitive :

$$- F(u) = \frac{2}{(c-a)(b-a)} (H^{-1}(u) - a - a \ln(\frac{H^{-1}(u)}{a})) \quad \text{sur } [0; \frac{b-a}{c-a}]$$

$$- F(u) = \frac{2}{(c-a)(b-a)} (c - H^{-1}(u) - \frac{c-b}{c-a} a \ln(\frac{b}{a}) + c \ln(\frac{H^{-1}(u)}{b})) \quad \text{sur } [\frac{b-a}{c-a}; 1].$$

Dans le cas où ( $a=0$ ), il suffit de substituer 0 à  $a$  dans toutes ces formules, et d'annuler les expressions en  $a \log(a)$ . Dans le cas où  $b=c$ , il faut remplacer systématiquement  $b-c$  par 0.

### ANNEXE C. FORMULAIRE POUR UNE DISTRIBUTION LOG-NORMALE DES VALEURS DU TEMPS

Bien que non nécessaire à la lecture et à la validation du contenu de l'article, voici un formulaire pour traiter un modèle bi-critères à valeur du temps distribuée continûment selon une loi log-normale. En effet la loi log-normale est la plus utilisée dans la pratique du modèle prix-temps en France, depuis les travaux de Roger MARCHE et Claude ABRAHAM.

Soit une distribution des valeurs du temps selon une loi de probabilité log-normale de fonction de répartition cumulée  $H(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - m}{s}\right)$  avec  $\Phi$  la fonction de répartition cumulée d'une loi gaussienne centrée normée. Donc la loi du logarithme naturel de la valeur du temps est gaussienne de moyenne  $m$  et d'écart-type  $s$ . Alors il vient :

$$H^{-1}(y) = \exp\left(m + s \Phi^{-1}(y)\right)$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{H^{-1}(u)} du = \exp\left(\frac{s^2}{2} - m\right) \Phi\left(\Phi^{-1}(x) - s\right)$$

### ANNEXE D. SCHEMA DU RESEAU DES PREMIERES ETUDES A86 OUEST

