

**CONGESTION URBAINE :
UN MODELE DE TRAFIC DE POINTE
A COURBE DEBIT-VITESSE ET
DEMANDE ELASTIQUE**

JEAN-PIERRE BERTHIER
ADMINISTRATEUR DE L'INSEE¹

**1. IMPORTANCE ET COMPLEXITE DE LA PRISE EN COMPTE DE LA
CONGESTION URBAINE**

Dans l'ensemble des coûts de transport, les coûts externes retiennent particulièrement l'attention des économistes. Ceci se justifie par le fait que la présence d'effets externes entraîne l'incapacité du marché à conduire les usagers vers des choix efficaces, en l'absence d'instruments les

¹ *Avertissement* : Cette étude a été effectuée alors que l'auteur était en poste à la Direction de la Prévision (Bureau Equipement, Transport, Energie). Elle a bénéficié particulièrement des conseils de Dominique BUREAU que l'auteur tient à remercier. Seule la mise en forme du présent article a été réalisée après son retour à l'INSEE. Le contenu de cet article ne saurait engager l'INSEE ou la Direction de la Prévision, mais uniquement son auteur.

responsabilisant aux coûts correspondants. Les différentes études disponibles tendent à montrer que les coûts de congestion routière sont parfois particulièrement importants. Les principes théoriques d'internalisation de ces coûts externes de congestion au moyen d'un péage sont bien connus. Cependant, lorsque l'on considère un modèle de trafic précis, l'expression de ce péage de congestion peut être plus ou moins difficile à définir. En particulier, son montant peut être fonction du temps (phénomène de pointe). Surtout, l'application concrète d'un tel péage, d'autant plus élevé que la qualité de service est dégradée, pose de nombreux problèmes et en particulier celui de son acceptabilité socio-politique. Toutefois, l'évolution des mentalités, si elle ne peut intervenir que dans la durée, n'en est pas moins réelle comme le montrent les résultats encourageants des modulations tarifaires sur l'autoroute A1, en milieu péri-urbain au nord de Paris.

Dans les bilans coûts-avantages relatifs aux investissements routiers en site urbain, les gains de fluidité représentent généralement le poste essentiel. Mais, outre la fragilité liée à la quantification du congestionnement préexistant, la méthode habituellement utilisée pour évaluer les gains pour un trafic détourné supposé connu n'est pas satisfaisante pour deux raisons :

- En estimant à partir d'une courbe débit-vitesse l'accroissement de vitesse des usagers restants, et donc leur gain de temps, elle considère qu'il n'y a pas de nouveaux entrants. L'amélioration des conditions de circulation va pourtant attirer de nouveaux usagers, ce qui réduira la décongestion et diminuera le gain de temps des anciens usagers. Parallèlement, les nouveaux usagers retireront un gain des trajets qu'ils renonçaient à effectuer jusque là.
- Les phénomènes de congestion les plus aigus sont liés aux périodes de pointe, de nombreux usagers souhaitant se rendre à un endroit donné à un même moment (ou du moins dans une période de faible étendue). Un problème essentiel est alors celui de l'étalement de la période de pointe. C'est notamment le cas en milieu urbain ou périurbain. Or, les modèles habituels, en supposant que les heures de départ des usagers sont des données exogènes, nient la possibilité d'adapter l'étalement des départs en fonction de l'évolution des trafics.

ARNOTT, DE PALMA et LINDSEY ont développé un modèle de trafic de pointe, présenté en 2, qui permet cependant d'endogénéiser les heures de départ. L'adaptation de l'offre à une demande plus forte ne s'effectue alors pas par une réduction de la vitesse, comme dans les modèles classiques, mais en décalant ses horaires, ce qui constitue une autre forme de baisse de la qualité de service. Si ce mode d'ajustement présente un grand intérêt théorique, l'expérience, notamment en région Ile-de-France, confirme très concrètement l'importance de son rôle. Le « rapport BOITEUX » souligne

par exemple la réalité de la tendance à l'étalement des pointes au fil des années, les trafics allant croissant. Par ailleurs, la période des grèves des transports en commun en décembre 1995 a montré, dans une situation exacerbée, que l'étalement des pointes pouvait constituer une réalité de grande ampleur permettant d'éviter le blocage complet de la circulation, même si les coûts sociaux de cet ajustement sont loin d'être négligeables.

S'inscrivant dans la problématique des modèles de pointe développés par ARNOTT, DE PALMA et LINDSEY, le modèle que nous proposons en 3 en modifie deux hypothèses réductrices :

- alors que dans le modèle cité, le nombre d'utilisateurs est une donnée exogène, on recherche ici son endogénéisation. En effet, celle-ci est *a priori* indispensable pour aborder les problèmes d'induction qui nous préoccupent. On supposera ainsi très simplement que le nombre d'utilisateurs est fonction décroissante du coût généralisé du déplacement. On peut en effet penser qu'au-delà d'un certain coût, certains utilisateurs potentiels renoncent à leur déplacement, empruntent un autre mode (transport en commun par exemple) ou simplement changent leur itinéraire.
- le modèle cité est celui d'un goulot, le temps de trajet étant assimilé au temps d'attente dans une queue précédant un obstacle ponctuel. On reprendra par contre ici l'hypothèse habituelle d'une infrastructure d'une certaine longueur et caractérisée par une courbe débit-vitesse. Le modèle proposé tente ainsi de combiner les deux approches dans ce qu'elles ont de meilleur.

2. DEUX MODELES DE REFERENCE

2.1. LE MODELE DEBIT-VITESSE²

L'infrastructure routière est ici considérée comme un bien public à qualité variable : le temps nécessaire pour effectuer un parcours donné, et donc la vitesse moyenne des véhicules, dépend de l'importance du trafic. On peut justifier intuitivement ce mode d'ajustement au trafic en constatant qu'une circulation importante pourra nécessiter des distances réduites entre véhicules et donc des vitesses assez faibles, les conducteurs adaptant celles-ci aux exigences de sécurité (même si ces dernières ne sont pas totalement respectées).

² Voir LOUTREL (1992) et COMMISSARIAT GENERAL DU PLAN (1994).

D'une façon plus précise, on peut déduire de l'observation des conditions de circulation sur une infrastructure routière de caractéristiques données, une relation entre débit Q et vitesse moyenne V . Il s'agit ici d'une courbe purement technologique, caractérisant la capacité d'une infrastructure donnée à écouler le trafic. L'utilisation des courbes débit-vitesse s'effectue cependant en général sur des courbes reliant vitesse moyenne et trafic journalier moyen sur une année et obtenues par agrégation. Ces courbes s'écartent d'une notion purement technologique car elles intègrent implicitement une structure de répartition du trafic dans le temps. Leur utilisation pour prévoir les conditions de circulation à un horizon plus ou moins éloigné suppose par ailleurs que le trafic croît homothétiquement, c'est-à-dire à répartition dans le temps constante.

L'utilisation des courbes débit-vitesse, sous la forme V fonction de Q , permet de calculer les coûts externes de congestion liés à l'entrée sur l'infrastructure d'un véhicule supplémentaire et de déterminer le péage de congestion optimal. Un tel péage pose toutefois le problème de son acceptation par les usagers puisque la situation de chacun d'entre eux s'est détériorée, même si au niveau collectif le surplus du gestionnaire de l'infrastructure qui perçoit les péages fait plus que compenser la perte de surplus des usagers. Le Tableau 1 précise les caractéristiques de ce modèle et permet une comparaison avec l'autre modèle de référence.

2.2. UN MODELE DE POINTE AVEC GOULOT D'ETRANGLEMENT : LE MODELE D'ARNOTT, DE PALMA ET LINDSEY³

Dès la fin des années 1960, VIKREY, en opposition avec l'approche précédente, soulignait que la durée de la congestion est endogène : l'utilisateur souhaitant arriver à une certaine heure est amené en période de pointe à arbitrer entre son temps de trajet et son temps d'avance ou de retard à l'arrivée s'il décale son départ. ARNOTT, DE PALMA et LINDSEY ont récemment développé cette approche dans le cadre d'un modèle de goulot d'étranglement : l'arrivée (qui peut être l'entrée sur une infrastructure fluide) est régulée par l'intermédiaire d'un goulot ponctuel de débit maximum fixé, en amont duquel une queue se forme éventuellement dont la longueur détermine le temps d'attente.

La schématisation à l'extrême du fonctionnement de l'infrastructure sous la forme d'un goulot permet d'étudier assez aisément le problème de l'étalement de la pointe en fonction du nombre d'usagers. Par rapport au modèle débit-vitesse, on abandonne donc le mode d'ajustement

³ Voir notamment ARNOTT *et al.* (1990).

technologique par l'intermédiaire du temps de parcours, et l'on introduit un mode d'ajustement plus lié au comportement des usagers, susceptibles d'adapter leur heure de départ pour éviter de circuler en période de trop forte congestion.

Les données de base du modèle sont les suivantes :

- le goulot permet un débit s , c'est-à-dire que dès que le taux d'arrivée des véhicules dépasse cette valeur, une queue se développe. Les usagers sont supposés passer à travers le goulot (en un temps nul) dans leur ordre d'arrivée ;
- les usagers se déterminent en fonction d'un coût généralisé comprenant une valorisation des temps d'attente passée dans la queue, et de retard ou d'avance à l'arrivée (une fois le goulot franchi) par rapport à un objectif commun d'heure d'arrivée ;
- le nombre N d'usagers de la pointe est supposé fixé. Par ailleurs, on admet que l'équilibre atteint est un équilibre de NASH : par rapport à cet équilibre, aucun agent n'a intérêt à modifier son comportement, celui de tous les autres étant supposé fixé. Cette hypothèse, qui entraîne que les flux de départ s'établissent de manière à égaliser les coûts généralisés de chaque usager puisque ceux-ci sont homogènes, suppose naturellement une parfaite information des agents et donc probablement une bonne régularité du phénomène de pointe.

La résolution du modèle permet de montrer que le coût global lié à l'attente dans la queue représente la moitié du coût total, indépendamment des valeurs du temps de queue, d'avance ou de retard et surtout du nombre d'usagers N . Ce dernier point montre l'importance du phénomène d'ajustement par l'étalement de la pointe, alors que dans le modèle débit-vitesse, les coûts de congestion tendent à devenir prépondérants lorsque le trafic est suffisamment élevé puisque la vitesse devient alors très faible. Le péage de congestion optimal est d'autant plus élevé que l'on se rapproche de l'objectif commun d'heure d'arrivée. Par ailleurs, pour chaque usager, le coût généralisé reste le même lors de l'introduction de ce péage. Il n'y a donc, d'un point de vue théorique, pas de problème d'acceptabilité, à l'encontre de ce que l'on a indiqué pour le modèle débit-vitesse.

2.3. COMPARAISON DES DEUX MODELES

Le Tableau 1 synthétise les principales caractéristiques des deux modèles exposés ci-avant.

Tableau 1 : Les principales caractéristiques du modèle débit-vitesse et du modèle d'Arnott, de Palma et Lindsey

Type et fonctionnement du modèle. Type d'ajustement au trafic	Coûts totaux	Coûts de congestion/ coûts totaux	Péage optimal
<p>Modèle Débit-Vitesse</p> <ul style="list-style-type: none"> . relation technologique entre la vitesse V et le débit Q des véhicules, caractérisant l'infrastr. ; . possibilité d'interpréter cette relation à partir de la distance nécessaire entre deux véhicules circulant à une certaine vitesse ; . ajustement au moyen d'une qualité de service variable (temps de trajet). 	<ul style="list-style-type: none"> . proportionnel à $Q / V (Q)$ 	<ul style="list-style-type: none"> . égal à $1 - V (Q) / V_{\max}$; . variable avec le débit ; . peut être proche de l'unité lorsque la congestion est forte. 	<ul style="list-style-type: none"> . commun à tous les usagers ; . proportionnel à $-\frac{Q V' (Q)}{V^2 (Q)}$.
<p>Modèle de Goulot (Arnott)</p> <ul style="list-style-type: none"> . goulot sans dimension, de débit constant, s, avec phénomène de queue en amont ; . objectif d'heure d'arrivée commun à tous les usagers ; . nombre total d'usagers N exogène ; . coût généralisé commun à tous les usagers ; . ajustement grâce à un étalement de la pointe, certains usagers acceptant de décaler leurs horaires pour éviter une queue trop longue. 	<ul style="list-style-type: none"> . proportionnel à N^2 / s 	<ul style="list-style-type: none"> . 1/2 (le coût total du temps d'attente dans la queue est égal à la moitié du coût total). 	<ul style="list-style-type: none"> . variable en fonction de la position dans la pointe ; . nul aux extrémités ; . maximum proportionnel à N/s à l'heure constituant l'objectif commun de passage dans le goulot.

3. UN MODELE DE TRAFIC DE POINTE A COURBE DEBIT-VITESSE ET DEMANDE ELASTIQUE⁴

Les deux modèles de référence exposés précédemment présentent chacun, malgré leurs limites, un certain nombre de points forts :

- le modèle débit-vitesse, le plus classique, permet une représentation satisfaisante du fonctionnement technologique d'une infrastructure routière. Dès lors, ce modèle est apte à prendre en compte un ajustement entre offre (capacité de l'infrastructure) et demande (quantité de véhicules) s'effectuant par l'intermédiaire d'une qualité de service variable (augmentation du temps de parcours avec le trafic) ;
- le modèle de goulot d'ARNOTT introduit quant à lui un type d'ajustement nouveau et qui apparaît indispensable à une bonne compréhension des problèmes de congestion urbaine : l'étalement des pointes du fait que les usagers peuvent arbitrer leurs horaires de départ en fonction du degré de congestion en période de pointe. Mais le fonctionnement du goulot schématise à l'excès celui des infrastructures routières habituelles.

Ces deux modèles apparaissent en définitive complémentaires, chacun pouvant capter une partie de la réalité très complexe de la congestion urbaine. C'est pourquoi nous nous sommes attachés à étudier un modèle qui réalise une certaine synthèse des deux approches précédentes. En particulier, on retient dans le modèle présenté ici le fonctionnement technologique de l'infrastructure sous forme d'une courbe débit-vitesse, interprétée comme distance entre véhicules le long de l'infrastructure, en le couplant avec les hypothèses du modèle de pointe, ce qui permet de considérer que les usagers arbitrent leurs horaires de départ. Par ailleurs, on a introduit une fonction de demande permettant de faire varier le trafic avec le coût généralisé des déplacements.

3.1. LE MODELE DEVELOPPE

3.1.1. Présentation du modèle

On considère une route d'une longueur L comportant n voies et d'une capacité caractérisée par sa courbe débit-vitesse : $V=d \cdot e \cdot Q$, où d représente

⁴ On trouvera dans BERTHIER (1998), et notamment dans les annexes, l'explicitation des calculs dont seules les principales étapes sont mentionnées ici. Ce document peut-être obtenu auprès de l'auteur.

donc la vitesse maximale. On suppose par ailleurs qu'un certain nombre de déplacements potentiels ont lieu en fonction d'un coût généralisé, alliant la durée du parcours sur cette route et le temps d'avance ou de retard à la sortie de cette route, tous les usagers souhaitant arriver à un même moment, heure d'arrivée objectif prise par la suite comme origine des temps (phénomène de pointe). L'heure d'arrivée effective est alors positive si l'usager arrive en retard et négative s'il arrive en avance. On notera :

- . t l'heure de départ, $T(t)$ le temps de parcours, et donc $t+T$ l'heure d'arrivée ;
- . α la valeur du temps de parcours, β la valeur du temps d'avance, β' la valeur du temps de retard. Ces valeurs sont supposées les mêmes pour tous les usagers ;
- . p un péage éventuel.

On suppose que le nombre de déplacements effectués varie linéairement en fonction du coût généralisé⁵, soit : $D=a-b.C_g$, avec :

a) Pour ceux qui arrivent en avance : puisque $t+T$ qui représente l'heure d'arrivée est négative, on a :

$$C_g = \alpha.T(t) - \beta.(t+T) + p$$

b) Pour ceux qui arrivent en retard : $(t+T)$ étant positif, on a :

$$C_g = \alpha.T(t) + \beta'.(t+T) + p.$$

On effectuera, pour réaliser la suite des calculs, l'hypothèse simplificatrice que chaque véhicule roule à une vitesse constante lors de son parcours. L'intitulé des différentes variables est présenté dans l'Encadré 1.

3.1.2. Résolution du modèle

A l'équilibre, tous les véhicules qui réalisent le trajet l'effectue pour un même coût généralisé, sinon ceux qui ont le coût le plus élevé modifieraient leur départ (on reprend ici l'hypothèse d'un équilibre de NASH introduite dans le modèle d'ARNOTT). A un coût généralisé donné correspond un nombre de véhicules pouvant réaliser le parcours. La courbe donnant ce nombre de véhicules en fonction du coût généralisé constitue une donnée technologique caractérisant l'infrastructure, lorsque les paramètres de

⁵ Cette hypothèse de linéarité, qui est toujours admissible localement mais qui est arbitraire sinon, pourrait être relâchée ici sans difficulté, si ce n'est de justifier une spécification particulière. On pourrait cependant envisager de considérer une courbe à élasticité constante $D=a.C_g^b$.

valorisation du temps sont donnés. Contrairement au modèle débit-vitesse, ce n'est pas le débit qui est fonction de la qualité de service, mais un stock.

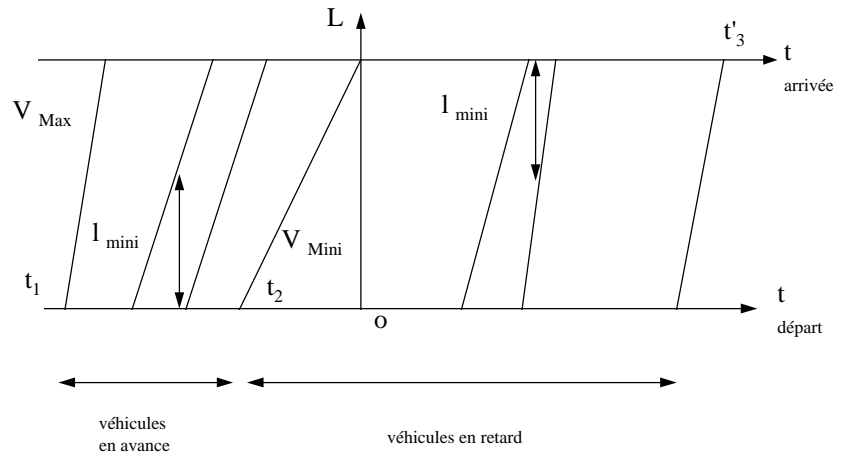
Encadré 1 : Intitulé des variables du modèle

T	: temps de parcours
t	: temps (heure d'arrivée objectif prise comme origine)
t_1	: départ de l'utilisateur partant le plus tôt
t_2	: départ de l'utilisateur arrivant juste à l'heure (en $t=0$)
t'_3	: heure maximale des arrivées
V	: vitesse
L	: longueur de l'infrastructure
e, d	: paramètres de la courbe débit-vitesse (d correspond à la vitesse maximale)
n	: nombre de voies
q(t)	: débit d'une voie
Q(t)	: débit de l'infrastructure à n voies
α	: valorisation du temps de parcours
β	: valorisation du temps d'avance
β'	: valorisation du temps de retard
p	: montant du péage
Cg	: coût généralisé, prenant en compte le temps de trajet, le temps d'avance ou de retard et le montant du péage
D	: nombre de déplacements (fonction de demande)
a, b	: paramètres de la fonction de demande
Qa	: nombre de véhicules qui arrivent en avance
Qr	: nombre de véhicules qui arrivent en retard
Q	: nombre total de véhicules empruntant l'infrastructure

On s'intéressera dans un premier temps à la détermination de cette relation entre coût généralisé et nombre total de véhicules. Dans un deuxième temps (à partir du 3.2.2.), on couplera cette relation avec la courbe de demande afin de déterminer l'équilibre.

Revenons dans un premier temps au problème essentiel, qui est le plus délicat, de la détermination de la "courbe d'offre" $Q(C_g)$. Pour cela, on raisonne à C_g fixé. L'idée de départ est de considérer que la courbe débit-vitesse relative à une voie constitue une représentation macroscopique d'une réalité microscopique qui impose à un véhicule une distance minimum, par rapport au véhicule qui la précède, en fonction de sa vitesse (en cas de débit constant, les deux représentations sont mathématiquement équivalentes). Considérons le Graphique 1 représentant, pour une voie, les "parcours" (l'équivalent des sillons pour les trains) des véhicules en fonction de leur heure de départ.

Graphique 1 : "Parcours" des véhicules en fonction de leur heure de départ



L'hypothèse de vitesse constante pour un véhicule donné conduit à des "parcours" rectilignes. L'expression du coût généralisé (comportant un péage p , éventuellement nul) pour les véhicules arrivant en retard étant différente de celle des véhicules arrivant en avance, on est amené à calculer séparément le nombre de chacune des deux catégories de véhicules.

a) Pour les véhicules qui arrivent en avance :

Notons t_1 l'heure de départ du premier usager qui réalise le trajet. N'ayant pas de véhicule devant lui, il pourra effectuer son trajet à la vitesse maximum $V=d$ et mettra donc un temps $T=T_{\min}=L/d$.

C_g étant supposé fixé, on peut déterminer t_1 à partir de l'expression donnant le coût généralisé des véhicules arrivant en avance. On obtient :

$$t_1 = \left[(a - b) \frac{L}{d} + p - C_g \right] / b$$

Par ailleurs, on montre que l'heure de départ t_2 du véhicule arrivant juste à l'heure s'écrit :

$$t_2 = (p - C_g) / a$$

Les véhicules arrivant en avance sont les véhicules partant entre t_1 et t_2 . Pour ceux-ci, on obtient que

$$V(t) = (\alpha - \beta) \cdot L / (C_g + \beta \cdot t - p)$$

Ainsi qu'il était prévisible, la vitesse décroît en fonction du temps de départ (pour les véhicules arrivant en avance).

Les "parcours" ont donc tendance à s'écarter, comme on l'a figuré sur le Graphique 1 : la distance minimum entre deux véhicules n'est donc réalisée qu'au moment du départ. En conséquence, la courbe vitesse-débit ne correspond qu'à la situation de départ et c'est donc là qu'il convient d'effectuer le calcul du nombre de véhicules si l'on veut utiliser cette relation.

Si l'on note Q_a le nombre de véhicules qui arrivent en avance, on a pour une voie $Q_a/n = \int_{t_1}^{t_2} q(t).dt$ où $q(t)$ est le débit d'une voie correspondant à la vitesse d'un véhicule partant en t .

Puisque la courbe débit-vitesse $V=d-e.Q$ s'applique globalement aux n voies, on a pour une voie : $V=d-n.e.q$ puisque $Q=n.q$.

$$\text{Donc } Q_a = n \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{d - V(t)}{ne} dt$$

A partir de l'expression déjà calculée donnant $V(t)$, on obtient

$$Q_a = \int_{t_1}^{t_2} ([d - (\alpha - \beta).L / (Cg + \beta.t - p)] / e).dt$$

t_1 et t_2 étant connus, Q_a peut donc être calculé en fonction de Cg .

b) Pour les véhicules qui arrivent en retard :

Cette fois-ci, la vitesse est croissante avec l'heure de départ et les parcours se rapprochent. La contrainte de distance minimale entre véhicules s'applique donc à l'arrivée et c'est là que la relation débit-vitesse est effective.

Aucun véhicule ne peut arriver après une heure t'_3 correspondant à un temps de parcours $T_{\min} = L/d$, c'est-à-dire $t'_3 = (Cg - p - \alpha.L/d) / \beta$.

Les véhicules arrivant en retard sont ainsi les véhicules arrivant entre 0 et t'_3 . En notant Q_r leur nombre, on obtient :

$$Q_r(Cg) = \int_0^{t'_3} ([d - L.\alpha / (Cg - p - \beta'.t')]/e).dt'$$

Finalement, le nombre total de véhicules s'écrit $Q(Cg) = Q_a(Cg) + Q_r(Cg)$.

En poursuivant les calculs on obtient finalement :

$$Q(Cg) = A.(Cg - p) + B.\ln(Cg - p) + C$$

avec $A = g.d/e.\beta'$

$$B = -g.\alpha.L/e.\beta'$$

$$C=[g \cdot \alpha \cdot L / e \cdot \beta'] \cdot [-1 + \ln(\alpha \cdot L / d)]$$

$$\text{où } g = 1 + \beta' \cdot (\alpha - \beta) / \alpha \cdot \beta$$

Le trafic total Q est bien fonction de C_{g-p} , c'est-à-dire du coût généralisé hors péage, ce dernier ne jouant pas sur la capacité technologique de l'itinéraire (mais déplacera la courbe de demande). Comme dans le modèle débit-vitesse classique, on retrouve l'idée que l'aptitude de l'infrastructure à écouler le trafic est d'autant plus élevée que la qualité de service admise est faible. Mais alors que dans le modèle classique c'est le débit qui est relié à la vitesse, ici c'est le nombre total de véhicules qui est fonction du temps généralisé (coût généralisé hors péage).

Ce modèle s'apparente au modèle d'HENDERSON (voir annexe) en ce sens qu'il allie phénomène de pointe, avec des départs endogènes, et courbe débit-vitesse. Dans son modèle, HENDERSON détermine la vitesse des véhicules en fonction de la densité de véhicules entrant simultanément dans l'infrastructure. Ceci entraîne qu'un véhicule peut éventuellement partir après un autre et arriver pourtant avant. Ce défaut de cohérence (puisque tous les usagers ont les mêmes caractéristiques) a été critiqué par K.A. SMALL (1992). Dans le modèle que l'on propose, ce phénomène ne peut pas se produire puisque par construction il y a toujours une distance minimum entre un véhicule et celui qui le précède.

3.1.3. Spécifications numériques

En ce qui concerne l'infrastructure, on supposera l'existence d'un ou deux itinéraires ayant des caractéristiques communes.

On prendra $d = V_{\max} = 120$ km/h. On fixera e de façon à ce que le débit obtenu soit de 4 000 véhicules par heure pour une vitesse de 25 km/h (implicitement on suppose qu'il s'agit d'une deux voies, mais le nombre de voies ne figure pas explicitement dans la formule de calcul). On obtient $e = 0,0238$. On prendra $L = 10$ km.

Pour la valeur du temps de parcours, on prendra $\alpha = 63$ F/h ce qui correspond à la valeur révélée du temps dans le modèle (interurbain) ARIANE de la Direction des Routes. Pour la valeur du temps d'avance et de retard, on prendra $\beta = \beta' = \frac{a}{2}$ en s'inspirant des estimations données dans SMALL (1982), qui aboutissent à une valorisation de la minute de trajet 1,9 fois plus élevée que celle de la minute de retard.

Pour la demande de déplacements ($D=a-b.C_g$), on fixera $D=2\ 000$ pour une vitesse $V=25$ km/h et aucun temps d'attente ou de retard, c'est-à-dire $C_g=25,2$ F.

On se fixera par ailleurs une élasticité négative unitaire de la demande par rapport au coût généralisé autour du point ($D=2\ 000$, $C_g=25,2$). On obtient alors $D=4\ 000-79,37.C_g$. Comme variantes d'élasticité, on prendra également $\epsilon=-2$ d'où $D=6\ 000-158,74.C_g$ et $\epsilon=-0,5$ d'où $D=3\ 000-39,68.C_g$.

Pour tester la sensibilité au potentiel de déplacements (et donc à la congestion), on pourra par ailleurs effectuer une variante avec $D=4\ 000$ pour $V=25$ km/h ($C_g=25,2$) ce qui donne, pour $\epsilon=-1$, $D=8\ 000-158,74.C_g$.

3.2. FONCTIONNEMENT DU MODELE

3.2.1. Importance des possibilités d'étalement du trafic

Le Graphique 2 représente la capacité totale d'écoulement du trafic d'un itinéraire unique (tel que défini ci-avant) sans péage, en fonction du coût généralisé commun à tous les usagers. Le coût minimum de 5,25 F correspond à la vitesse maximum permise par la courbe débit-vitesse (120 km/h) et à une arrivée juste à l'heure. On constate que le coût généralisé est presque linéaire (au-delà du coût minimal) en fonction du trafic, contrairement à ce qu'il se passe avec une simple courbe débit-vitesse (le coût s'accroissant alors très rapidement au-delà d'un certain trafic). L'explication réside dans la croissance de l'étendue de la plage horaire des départs en fonction du trafic total.

On peut calculer d'une façon générale l'étalement des départs, c'est-à-dire l'intervalle de temps qui sépare le premier et le dernier départ :

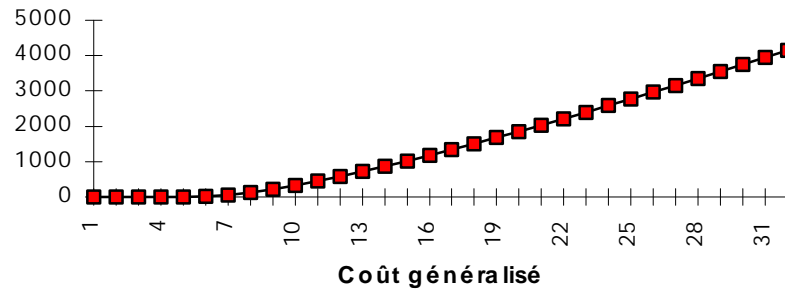
- . le premier départ a lieu en t_1 que l'on a déjà calculé ;
- . le dernier départ peut être pris égal à $t_3=t'_3-L/d$ (Cf. 3.2.1).

On obtient alors :

$$\Delta t=(C_g-p-\alpha.L/d).(1/\beta+1/\beta')$$

L'étalement des départs est donc une fonction affine du coût généralisé et linéaire en fonction du coût généralisé hors péage et hors coût d'un trajet à vitesse maximum.

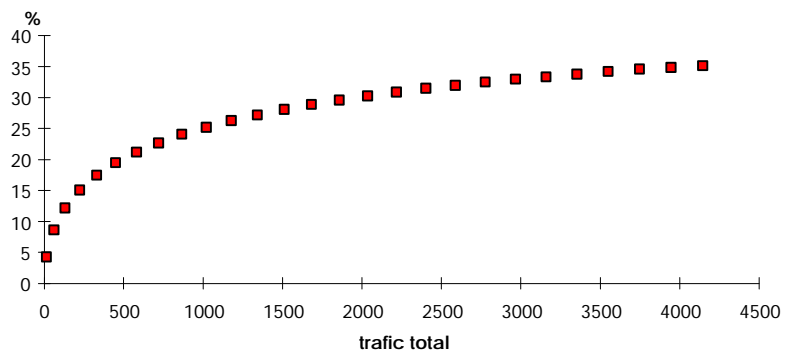
Graphique 2 : Capacité totale d'écoulement du trafic d'un itinéraire unique, selon le coût généralisé



On peut considérer à partir de cette expression l'étalement comme une fonction implicite du trafic total. On observe que contrairement au modèle de type goulot, l'étalement de la pointe à trafic total fixé dépend alors des paramètres α , β , β' , c'est-à-dire du comportement des usagers. On montre en fait que cette dépendance ne s'effectue qu'à travers les valeurs relatives entre α , β , β' . Le fait que l'étalement de la pointe est fonction de la valeur relative du temps de parcours au temps d'avance-retard est également une propriété du modèle d'HENDERSON (Cf. annexe).

Le Graphique 3 montre par ailleurs que, dans le coût généralisé de l'ensemble des véhicules, la part des temps d'attente ou de retard croît avec le trafic total.

Graphique 3 : Part des temps d'attente-retard dans le coût généralisé, selon le trafic total



On montre que le rapport R du coût total d'avance-retard au coût généralisé total hors péage (lequel ne représente qu'un transfert au niveau de la collectivité) s'écrit :

$$R=1-\frac{(Cg-p-\alpha L/d)^2}{2(Cg-p)\{Cg-p-\alpha L/d+(\alpha L/d)(\ln \alpha L/d-\ln(Cg-p))\}}$$

R ne dépend ainsi que de $Cg-p$ (coût hors péage) et de $\alpha.L/d$ (coût du trajet à vitesse maximum). En particulier, il est indépendant de β et β' (valorisation des temps d'attente-retard). Cette expression implique aussi que R tend vers 1/2 quand Cg tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque Q tend vers l'infini. On montre également que R est croissant avec Cg (et donc avec Q) et qu'ainsi R est toujours inférieur à 1/2.

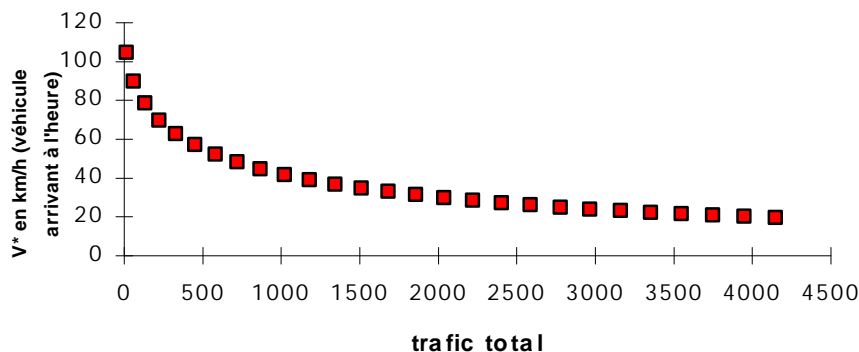
Cette propriété du modèle s'écarte du modèle de goulot de ARNOTT dans lequel ce rapport est toujours égal à 1/2 puisque le temps de queue représente la moitié du coût généralisé et que celui-ci est uniquement composé du coût de la queue et du coût d'avance-retard. Il est d'ailleurs intéressant de constater que si, dans la formule obtenue ci-avant, on fait tendre L vers zéro, on retrouve le coefficient 1/2 conformément au modèle de goulot dans lequel l'infrastructure est sans dimension (temps de passage nul).

On retrouve par contre certaines propriétés qualitatives du modèle d'HENDERSON (Cf. annexe). Dans celui-ci, la fraction du coût total correspondant au temps d'avance-retard est également croissant avec le trafic et toujours inférieur à 1/2. Mais la limite est égale à $n/(2.n+1)$ où n est un paramètre (supérieur à 2) intervenant dans la courbe débit-vitesse retenue.

Même si la limite dans notre modèle correspond à la valeur du modèle d'ARNOTT, l'exemple numérique proposé (Graphique 3) suggère qu'en pratique on se situe assez loin de cette limite, l'équilibre correspondant à un rapport d'environ 1/3 et la croissance de ce rapport avec le trafic ne s'effectuant que lentement.

Parallèlement à l'étalement des départs, la vitesse des véhicules qui se situent dans la pointe du trafic diminue avec l'accroissement du trafic total, celle des véhicules acceptant d'avancer ou de différer suffisamment leur départ restant proche du maximum de 120 km/h. Le Graphique 4 montre la relation liant la vitesse minimum (celle d'un véhicule arrivant juste à l'heure) au trafic total : l'étalement des départs fait qu'il n'y a pas de trafic total maximum, la vitesse des véhicules les plus lents ne décroissant qu'asymptotiquement vers 0.

Graphique 4 : Vitesse dans l'hyperpointe, selon le trafic total



Note : On note V^* la vitesse en km/h des véhicules arrivant juste à l'heure (c'est-à-dire ceux qui vont le plus lentement).

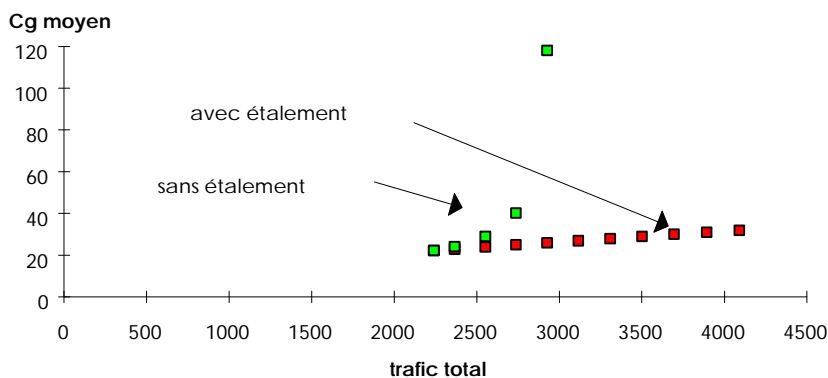
En partant d'une situation proche de la saturation, correspondant à l'équilibre sur un itinéraire sans péage calculé au paragraphe suivant, on peut comparer deux hypothèses différentes :

- le modèle présenté dans cette note ("avec étalement") ;
- un modèle ("sans étalement") dans lequel, lorsque l'on fait augmenter le trafic, on suppose que la structure temporelle des trafics reste inchangée, ce qui est l'hypothèse implicite la plus souvent retenue en pratique.

La vitesse minimale (dans l'hyperpointe) décroît bien plus faiblement lorsqu'il y a étalement et, contrairement à ce qui se passe si l'on utilise simplement la courbe débit-vitesse ($V=d-n.e.q$), une vitesse nulle n'est jamais atteinte. Mais surtout (Graphique 5), on constate que la détérioration du coût généralisé moyen pour l'ensemble des usagers croît à peu près linéairement et assez faiblement en fonction du trafic, contrairement au modèle sans étalement dans lequel les coûts explosent.

Cette surestimation de l'impact d'une augmentation du trafic sur la qualité de service conduit naturellement à surestimer l'intérêt d'un accroissement des capacités et, par exemple, la rentabilité de la création d'un itinéraire en parallèle. Symétriquement, la non prise en compte de la réduction de l'amplitude de la période de pointe conduit à une surestimation des avantages de la décongestion (liée par exemple à la création ou l'amélioration d'un itinéraire alternatif).

Graphique 5 : Impact du niveau de trafic sur le coût généralisé moyen



3.2.2. Equilibre à 1 ou 2 itinéraires sans péage

On souhaite maintenant faire intervenir la courbe de demande afin de déterminer, de façon nécessairement numérique, l'équilibre du modèle.

A partir du calcul de $Q(Cg)$, il est possible de calculer par itération :

- l'équilibre pour un itinéraire, $Q(Cg)=D(Cg)$;
- l'équilibre avec deux itinéraires : $D(Cg)=2.Q(Cg)$ (les deux infrastructures ayant par hypothèse les mêmes caractéristiques, elles permettent les mêmes débits) ;
- le surplus de l'équilibre à deux itinéraires par rapport à l'équilibre à un seul itinéraire, c'est-à-dire le surplus lié à l'ouverture d'un deuxième itinéraire. Ce surplus est constitué de deux termes :
 - pour les anciens usagers, le surplus unitaire est égal à la baisse de Cg ;
 - pour les nouveaux usagers (trafic induit), le surplus unitaire est en moyenne égal à la moitié du surplus unitaire précédent (cette relation approximative classique est ici exacte car on a supposé une courbe de demande linéaire).

On remarque que l'incidence de l'élasticité de la demande est faible (Tableau 2). En particulier, la variation de surplus créé par le deuxième itinéraire est pratiquement constante. En revanche, l'impact du potentiel de déplacements (qui peut s'apprécier à travers le degré de congestion et la vitesse dans l'hyperpointe V^*) est fort. Il est remarquable de constater qu'à un potentiel deux fois plus élevé correspond une variation de surplus quasiment double.

Tableau 2 : Variations de surplus en cas de deuxième itinéraire

Cas étudiés	Equilibre à 1 itinéraire	Equilibre avec 2 itinéraires	Variation de surplus
Elasticité = - 1 D=4 000-79,37.Cg	Cg = 22,15 Q = 2 242 V* = 28,4	Cg = 16,93 Q ₁ = Q ₂ = 1 328 V* = 37,2	+ 12 784
Variante élasticité = -2 D=6 000-158,74.Cg	Cg = 22,85 Q = 2 372 V* = 27,6	Cg = 18,25 Q ₁ = Q ₂ = 1 551 V* = 34,5	+ 12 590
Variante élasticité = -0,5 D=3 000-39,68.Cg	Cg = 21,60 Q = 2 143 V* = 29,2	Cg = 16,03 Q ₁ = Q ₂ = 1 181 V* = 39,3	+ 12 546
Variante potentiel de déplacements double (avec élasticité = - 1) D=8 000-158,74.Cg	Cg = 28,57 Q = 3 464 V* = 22,1	Cg = 22,15 Q ₁ = Q ₂ = 2 243 V* = 28,4	+ 25 520

Note : On note V* la vitesse en km/h des véhicules arrivant juste à l'heure (c'est-à-dire ceux qui vont le plus lentement).

Cette variation de surplus va servir de référence dans la suite de l'étude de ce modèle, en particulier en ce qui concerne l'efficacité d'un péage.

3.2.3. L'importance du péage

Cas d'un seul itinéraire

On se place ici uniquement dans le cas "de base" où D=4 000-79,37.Cg. La perception d'un péage uniforme p permet de trouver un équilibre moins congestionné et finalement préférable collectivement, le péage constituant un transfert.

Pour un seul itinéraire, on obtient le surplus maximum pour un péage d'environ 10 F, le trafic diminuant alors de près d'un quart. Pour les anciens usagers, le coût du péage, en terme d'augmentation du coût généralisé de leur déplacement, est d'environ 7 F puisqu'ils bénéficient par ailleurs d'une amélioration des conditions de circulation.

La mise en place d'un péage uniforme n'est cependant pas la seule possibilité. On peut par exemple imaginer une tarification proportionnelle au temps de parcours (éventuellement couplée avec un terme uniforme).

Techniquement, l'effet d'un tel péage peut être étudié en augmentant la valeur du temps de parcours retenu dans le modèle. Un péage au temps de parcours donne des résultats bien meilleurs qu'un péage uniforme. Ainsi, avec un optimum voisin de 70 F/h, le surplus obtenu est près de 3 fois supérieur, le coût généralisé commun à tous les usagers étant plus faible alors que le trafic est plus fort (Tableau 3).

C'est que ce type de péage agit non seulement sur la quantité de trafic, à travers le niveau des péages perçus, mais également sur l'étalement de la pointe, via le rapport de la valeur du temps de parcours à celle du temps d'attente-retard (Cf. propriété du modèle décrites en 3.2.1.). En effet, plus ce rapport est élevé, plus l'étalement est important puisque l'inconvénient d'anticiper ou de différer son départ est minimisé par rapport à celui de se trouver dans l'hyperpointe (on a vu précédemment que le modèle de goulot ne captait pas cet effet, l'étalement de la pointe ne dépendant que de la caractéristique du goulot, en plus du nombre d'usagers).

L'effet sur l'étalement du trafic peut être isolé en appliquant différents péages de la forme $C.F/h-pF$, p étant calibré en fonction de C de telle façon que le total des péages soit nul, alors que le niveau de C conditionne le rapport valeur du temps de parcours/attente. On obtient alors qu'un péage globalement nul mais divisant par quatre la valeur relative du temps d'attente permet, en augmentant la plage horaire des départs d'environ 50%, de diminuer de 17% le coût généralisé (toujours commun à chaque usager du fait de la réorganisation des départs) tout en permettant à un plus grand nombre d'usagers d'effectuer le trajet (13% d'usagers supplémentaires). Le surplus se trouve entièrement réparti entre les différents usagers alors que le gestionnaire de l'infrastructure ne perçoit globalement aucun péage mais assure une fonction de transfert et doit reverser aux uns ce qu'il a prélevé aux autres.

En jouant sur les deux degrés de liberté que constituent le terme du péage proportionnel au temps et le terme uniforme, on peut optimiser le double rôle du péage consistant à diminuer l'intensité du trafic et à étaler la pointe. A l'optimum, les premiers et derniers départs sont alors subventionnés (péage négatif). Si l'on exclue cette possibilité, on est amené à tester des péages du type $C.(T-T_{\min})$ pour que le péage soit nul aux extrémités de la plage des départs. L'optimum est alors obtenu pour C environ égal à 150 F/h. Le surplus n'est en fait que très légèrement inférieur à ce qu'il était sans s'interdire des péages négatifs.

En définitive les résultats obtenus pour un seul itinéraire sont repris dans le Tableau 3.

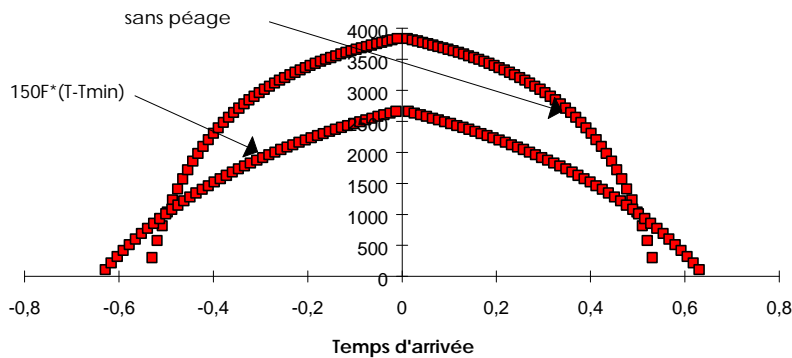
Tableau 3 : Variations de surplus en cas de péage

	Cg	Q	Montant total des péages	Variation de surplus par rapport à l'absence de péage	Variation de surplus rapportée à la variation de surplus créée par un deuxième itinéraire (sans péage)
Péage uniforme (10 F)	29,07	1692	+ 16920	+ 3308	+ 26%
Péage au temps de parcours (70 F/h)	27,61	1809	+ 20285	+ 9226	+ 72%
Péage au temps au-delà du minimum (150 F/h-12,5 F)	25,41	1983	+ 17 638	+ 10 751	+ 84 %
Pas de péage (rappel)	22,15	2242			

Sur cet exemple, la mise en place d'un péage peut procurer un surplus collectif représentant plus de 80 % du surplus procuré par le doublement de l'itinéraire existant. Cependant on voit que la situation des usagers s'est dégradée (avant utilisation éventuelle des recettes de péage à leur profit) puisque le montant total des péages est largement supérieur à la variation de surplus. Cette situation, classique lorsque l'on utilise des courbes débit-vitesse, est différente des conclusions du modèle de type goulot selon lesquelles le péage optimal ne modifie pas le surplus des usagers. Le Graphique 6 montre l'étalement du trafic dans le cas d'un péage : débit à la pointe nettement plus faible, étalement dans le temps plus important (malgré un trafic total plus faible).

La mise en place d'un tel péage pourrait poser des problèmes techniques et peut-être plus encore d'acceptabilité par les usagers dans la mesure où le montant à payer est d'autant plus élevé que la qualité de service est dégradée.

Graphique 6 : Débit avec ou sans péage



Le débit indiqué ici est le débit au départ pour les usagers en avance et le débit à l'arrivée pour les usagers en retard, ce qui permet d'obtenir un graphique symétrique.

Cas de deux itinéraires

Si l'on considère cette fois-ci deux itinéraires, il est possible de mettre un itinéraire à péage et de laisser l'autre libre d'accès (cas concret de la création d'une nouvelle voie à péage). On obtient que le péage maximisant les recettes est d'environ $7 F^6$.

La mise à péage de l'un des deux itinéraires conduit à créer un itinéraire à peu près fluide ($V^* = 50$ km/h) mais faiblement circulé (Tableau 4). Par rapport à l'existence de 2 itinéraires sans péage, le surplus collectif est plus faible, le gain de temps pour les véhicules de l'itinéraire rapide ne compensant pas les pertes pour l'itinéraire lent, alors que les trafics totaux sont assez proches. Une étude discriminant deux catégories de véhicules avec des valeurs du temps différentes, les usagers à valeurs élevées acceptant plus facilement de payer un péage pour obtenir des gains de temps, aboutirait peut-être à une conclusion différente sur ce dernier point.

⁶ Le péage maximisant le surplus est très faible. On se place ici dans le cas d'un concessionnaire ayant la liberté tarifaire.

Tableau 4 : Cas de deux itinéraires

Nombre d'itinéraires	Cg	Q	Variation de surplus par rapport à 1 itinéraire sans péage	V*	Remarque
2, dont 1 à péage (7 F)	19,60	Q ₁ = 1 785 Q ₂ = 661	+ 10 604	V* ₁ = 32,1 V* ₂ = 50,0	Itinéraire sans péage Itinéraire avec péage
1, sans péage (rappel)	22,15	Q = 2 242		28,4	
2, sans péage (rappel)	16,93	Q ₁ =Q ₂ =1 328	+ 12 784	37,2	

V* est la vitesse des véhicules arrivant juste à l'heure (c'est-à-dire ceux qui vont le plus lentement)

3.2.4. La prise en compte de l'induction

Reprenons l'exemple précédent de deux itinéraires dont 1 à péage.

Supposons que l'on parte d'une situation à un seul itinéraire (sans péage), avec un équilibre à Q=2 242 (Cf. ci-avant). On se pose le problème de la création d'un deuxième itinéraire à péage (p=7 F). Une étude de trafic prévisionnelle aboutirait à un trafic de Q₂=661.

La création de cet itinéraire entraînera une décongestion de l'itinéraire existant que l'on cherchera à évaluer. Si l'on néglige l'effet d'induction, on obtiendra que les anciens usagers restant sur l'itinéraire sans péage sont au nombre de 2 242-661=1 581 ce qui correspond à un équilibre avec Cg=18,43. On estimera alors les gains unitaires des anciens usagers restant sur l'itinéraire sans péage à 22,15-18,43=3,72 au lieu de 22,15-19,6=2,55.

Cependant au trafic induit correspond également un surplus dû à des déplacements qui n'étaient jusque là pas effectués. En supposant que le trafic induit se répartit entre les deux itinéraires proportionnellement aux trafics non induits⁷, on obtient que la surévaluation du surplus des usagers de l'itinéraire sans péage est encore de 35 %.

⁷ Cette hypothèse influe assez peu sur les résultats : si tout le trafic induit est situé dans les 1 777 véhicules circulant sur l'ancienne route, on obtient 37 % au lieu de 35 % ; avec l'hypothèse où le trafic induit se répartit par moitiés, on obtient 33 %.

Cette surévaluation est en fait très sensible à la courbe de demande comme le montre les variantes suivantes :

- les mêmes calculs avec un "potentiel de déplacement double", c'est-à-dire avec une congestion plus forte ($V^*=22,1$ km/h au lieu de 28,4 km/h) conduisent à un péage maximisant les recettes de 10 F et alors à une surestimation de 62 % au lieu de 35 %.
- avec la variante à élasticité -0,5 au lieu de -1 pour la spécification de base, la surévaluation du surplus sur l'ancien itinéraire est réduite à 18 % au lieu de 35 % (la recette maximum est également obtenue pour un péage voisin de 7 F).

3.2.5. *Ecart par rapport au modèle sans étalement ni trafic induit*

Le paragraphe précédent traite de l'écart entre les résultats du modèle et ceux d'un modèle ne tenant pas compte du trafic induit mais permettant une réorganisation des horaires de départ. Il reste à considérer la comparaison avec un modèle n'introduisant ni possibilité d'étalement ni trafic induit, c'est-à-dire le modèle débit-vitesse simple.

Reprenons la spécification "de base" ($D=4\ 000-79,37.Cg$). On a vu que l'équilibre se caractérisait par un trafic total de 2 242 véhicules, chacun ayant un coût généralisé de 22,15 F (Cf. Tableau 2). La création d'un deuxième itinéraire, soumis à un péage de 7 F conduit (Cf. Tableau 4) à un trafic de 1 785 véhicules sur l'ancien itinéraire (sans péage) et de 661 véhicules sur l'itinéraire à péage, le coût généralisé commun à tous les usagers étant de 19,60 F.

Si l'on néglige l'induction, on obtiendra comme au 3.2.4. que l'ancien itinéraire supportera un trafic de $2\ 242-661=1\ 581$ véhicules. Mais puisque l'on néglige en plus l'adaptation des heures de départ en fonction de l'évolution du trafic (ici la réduction de la plage des départs du fait de la baisse du trafic), on supposera ici que la structure des départs est celle du modèle avant création du nouvel itinéraire à péage et l'on effectuera une homothétie de rapport $1\ 581/2\ 242=0,705$ sur les débits $q(t)$.

On obtient alors numériquement un coût généralisé moyen de 19,58 F ce qui permet de calculer que le surplus correspondant à l'effet, sur l'ancien itinéraire, de la création du deuxième itinéraire est surestimé, dans le modèle sans étalement ni trafic induit, de 72 % par rapport au modèle proposé.

Comme au 3.2.4., on peut effectuer les mêmes calculs avec des variantes de la fonction de demande. Les résultats sont indiqués dans le Tableau 5.

Tableau 5 : Cas du modèle sans étalement ni trafic induit

Cas étudiés	V* pour un seul itinéraire sans péage	Sur-évaluation du surplus pour l'ancien itinéraire lorsque l'on néglige le trafic induit et la réorganisation des départs
D=4 000-79,37.Cg p=7 F (élasticité -1)	28,4	+ 72 %
D=8 000-158,74.Cg p=10 F (variante "potentiel double")	22,1	+ 106 %
D=3 000-39,68.Cg p=7 F (variante "élasticité - 0,5")	29,2	+ 55 %

4. CONCLUSION

Des développements qui précèdent, on voit émerger quelques conclusions qualitatives :

- l'importance de l'effet d'étalement du trafic dans le temps est claire. Raisonner en supposant que l'évolution du trafic s'effectue à structure temporelle constante peut aboutir à surestimer lourdement l'effet de décongestion lié au détournement d'une partie du trafic vers un autre itinéraire (ou un autre mode de transport). Il en est de même en ce qui concerne l'intérêt qu'il y a à augmenter les capacités face à une augmentation du trafic.
- l'importance des péages comme méthode de gestion des trafics de pointe est confirmée. Ils peuvent poser cependant des problèmes redistributifs et d'acceptabilité dans la mesure où le surplus des usagers liés à l'introduction d'un péage est négatif, contrairement au modèle d'ARNOTT, DE PALMA et LINDSEY ;
- la non prise en compte du phénomène d'induction de trafic entraîne des risques de surévaluation importante du surplus apporté par une nouvelle infrastructure, en liaison avec la recongestion partielle de l'ancienne infrastructure.

Certains développements théoriques mériteraient d'être entrepris, par exemple en ce qui concerne la valeur du temps : tous les usagers ont été supposés avoir les mêmes valeurs du temps. Cette hypothèse couramment

utilisée est particulièrement dommageable dans le cas où deux itinéraires, dont un à péage, sont en parallèle et il serait utile d'étudier l'incidence d'une discrimination dans les valeurs du temps.

Sur un autre plan, l'étude de quelques variantes a montré la sensibilité des résultats aux hypothèses numériques de départ concernant les deux paramètres par lesquels on peut caractériser la courbe de demande : le degré de congestion à l'équilibre (les caractéristiques de l'infrastructure étant fixées) et l'élasticité de la demande au coût généralisé. Celle-ci est en fait très mal connue en site urbain. Son évaluation dans quelques situations concrètes est probablement l'élément le plus indispensable à la recherche de conclusions plus opérationnelles à partir du modèle présenté dans ce document.

BIBLIOGRAPHIE

ARNOTT, de PALMA, LINDSEY (1990) Economics of a bottleneck. **Journal of Urban Economics**, n°27, pp. 111-130.

ARNOTT, de PALMA, LINDSEY (1993) A structural model of peak period congestion : a traffic bottleneck with elastic demand. **American Economic Review**.

BERTHIER J.-P. (1998) **Congestion urbaine : un modèle de trafic de pointe à courbe débit-vitesse et demande élastique**. Document de travail G 9811 de la Direction des Etudes et Synthèses Economiques de l'INSEE.

COMMISSARIAT GENERAL DU PLAN (1994) **Transport : pour un meilleur choix des investissements**. Groupe présidé par M. Boiteux. La Documentation Française.

HENDERSON J. V. (1977) **Economic theory and the cities**. New-York, Academic Press.

LOUTREL B. (1992) **Comparaison de deux modèles d'affectation de trafic sur itinéraires concurrents**. Mémoire de stage ENSAE.

MIGEON F.-D. (1994) **Congestion d'heure de pointe sur des axes concurrents de différents niveaux de service**. Mémoire de DEA de l'EHESS.

PAPON F. (1992) **Péage urbain : les routes de première classe**. Paradigme, Transport et communication n° 37.

SMALL K.A. (1982) The scheduling of consumer activities : work trips. **American Economic Review**, vol. 72.3, pp. 467-479.

SMALL K. A. (1983) The incidence of congestion tolls on urban highway. **Journal of Urban Economics**, n° 13.

SMALL K. A. (1992) Trip scheduling in urban transportation analysis. **AEA Papers and Proceedings**, vol.82.2, pp. 482-486.

VICKREY W. S. (1969) Congestion theory and transport investment. **American Economic Review**, n°59, pp. 251-260.

ANNEXE : LE MODELE D'HENDERSON

Cette présentation très courte du modèle d'HENDERSON est tirée de celle qui en est faite dans (MIGEON, 1994). Les principales hypothèses du modèle sont les suivantes.

Comme dans le modèle d'ARNOTT, tous les usagers ont une même heure cible, prise comme origine du temps ; ils se déterminent en fonction d'un coût généralisé agrégeant le temps de parcours (valorisé par α) et le temps d'attente ou de retard (valorisé par β) ; à l'équilibre tous les usagers ont le même coût généralisé (équilibre de NASH) ; le trafic total N est exogène.

Par contre, ce modèle n'est pas un modèle de goulot mais considère une courbe débit-vitesse. L'expression retenue est du type exponentiel (utilisée notamment par l'AASHO chargé de définir les normes autoroutières aux Etats-Unis) :

$T = T^0 + (x/c)^n$ avec $n \geq 2$, où T est le temps de parcours par unité de longueur, T^0 le temps minimal de parcours, lorsque l'itinéraire est parfaitement fluide, et x le débit. Dans la modélisation retenue, la vitesse de déplacement des véhicules ne dépend que de la densité de véhicules entrant simultanément dans l'infrastructure, $f(t)$.

HENDERSON obtient alors les résultats suivants :

$$f(t) = c \cdot \left(\frac{b}{a-b} \left(t + T^0 + \frac{a}{b} \left(\frac{n+1}{n} \frac{b}{2a} \frac{N}{C} \right)^{\frac{n}{n+1}} \right) \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{si } -T^0 - \frac{a}{b} \left(\frac{n+1}{n} \frac{b}{2a} \frac{N}{C} \right)^{\frac{n}{n+1}} \leq t \leq -T^0 - \left(\frac{n+1}{n} \frac{b}{2a} \frac{N}{C} \right)^{\frac{n}{n+1}}$$

$$f(t)=c \left\{ \frac{-\mathbf{b}}{\mathbf{a} + \mathbf{b}} \left(t + T^\circ - \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \left[\frac{n+1}{n} \frac{\mathbf{b}}{2\mathbf{a}} \frac{N}{C} \right]^{\frac{n}{n+1}} \right) \right\}^{\frac{1}{n}}$$

si $-T^\circ - \left\{ \frac{n+1}{n} \frac{\mathbf{b}}{2\mathbf{a}} \frac{N}{C} \right\}^{\frac{n}{n+1}} \leq t \leq -T^\circ + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \left\{ \frac{n+1}{n} \frac{\mathbf{b}}{2\mathbf{a}} \frac{N}{C} \right\}^{\frac{n}{n+1}}$

L'étendue de la plage des départs est donnée par :

$$\Delta t^e = 2 \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \left\{ \frac{n+1}{n} \frac{\mathbf{b}}{2\mathbf{a}} \frac{N}{C} \right\}^{\frac{n}{n+1}}$$

Le coût généralisé, commun à tous les usagers, est égal à :

$$C_g = \mathbf{a} \left[T^\circ + \left(\frac{(n+1)\mathbf{b}}{2n\mathbf{a}} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{N}{c} \right)^{\frac{n}{n+1}} \right]$$

Le coût moyen lié au temps d'avance ou de retard est :

$$C_{a,r} = \mathbf{a} \cdot \left[\frac{n}{2n+1} \left(\frac{(n+1)\mathbf{b}}{2n\mathbf{a}} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{N}{c} \right)^{\frac{n}{n+1}} \right]$$

On voit que la part du coût d'avance-retard dans le coût généralisé est inférieure à 1/2 et tend en croissant vers $n/(2.n+1)$ lorsque le trafic N tend vers l'infini.